PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 20 — 15. Oktober 1937. Redaktionsschluß für Nr. 22 am 1. November 1937. — 38. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

W. Steinhaus, A. Kußmann und E. Schoen, Sättigungsmagnetisierung und Annäherungsgesetz des Eisens. S. 777.

F. Altrichter und A. Lustig, Experimentelle Untersuchung über den Einfluß des Gefäßbodens auf die Fallbewegung von Kugeln in zähen Flüssigkeiten. S. 786.

W. Gerlach und O. Buhl, Über einen registrierenden Lichtmengenmesser. S. 795.

H. Ertel, Zur hydrodynamischen Form der Wellenmechanik. S. 797.

Berichte:

G. Gamow, Über den heutigen (1. Juni 1937) Stand der Theorie des β-Zerfalls. S. 800.

Besprechungen:

G. Hermann, E. May, Th. Vogel, Die Bedeutung der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis. S. 814.

W. Bruhns, Kristallographie. S. 815.

W. Nikitin, Die Federow-Methode. S. 815.

W. Riezler, Einführung in die Kernphysik. S. 816.

Nachrichten. S. 816.

ABHANDLUNGEN.

Sättigungsmagnetisierung und Annäherungsgesetz des Eisens.

Von W. Steinhaus, A. Kußmann und E. Schoen.

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

A. Ziel der Arbeit.

Das Verhalten ferromagnetischer Stoffe bei hohen Feldstärken ist in den letzten Jahren vielfach Gegenstand experimenteller Untersuchungen und theoretischer Erörterungen gewesen. Diese Arbeiten hatten zwei verschiedene Ziele, und zwar einmal die Auffindung des physikalisch wichtigen Gesetzes, dem die Magnetisierung bei hohen Feldstärken folgt (Annäherungsgesetz), sodann die auch technisch interessierende zahlenmäßige Festlegung des Sättigungswertes völlig reinen Eisens selbst. Trotzdem konnte eine endgültige Lösung beider Fragen bisher noch nicht gefunden werden. So zeigt die folgende Zahlentafel, daß im Sättigungswert noch Schwankungen bis zu etwa 5 Proz. vorkommen, und beim Verlauf der Magnetisierung bestehen Zweifel, ob das Annäherungsgesetz die Form $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty} = 1 - \frac{\text{const}}{\mathfrak{H}}$ [nach Weiß[1]), Steinhaus und Gumlich[2]), Weiß und Forrer[1])] oder $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{J}_\infty} = 1 - \frac{\text{const}}{\mathfrak{H}^2}$ [Akulov[2]), Czerlinsky[3])] hat, eine Frage, deren Lösung für unsere Vorstellungen über die magnetischen Elementarvorgänge von Bedeutung ist.

Zahlentafel I.

Sättigungsmessungen anderer Autoren.

Beobachter	Sättigungswert	Schrifttumsstelle
B. O. Peirce ...	21780	Sil. J. **28** I, 1909
R. Williams ...	22414	Phys. Rev. **6**, 204, 1915
E. Gumlich	21620	Abh. d. PTR. **4**, 1918
K. Honda u. S. Kaya	21280	Sc. Rep. Tohok. Univ. **15**, 721, 1926
E. Dussler u. W. Gerlach .	21317	Zeitschr. f. Phys. **44**, 279, 1927
F. Stäblein ...	21260	Zeitschr. anorg. u. allg. Chem. **174**, 193. 1928
P. Weiß u. R. Forrer ...	21561[4])	Ann. de phys. (10) **12**, 313. 1929
H. Ostermann .	22580	Diss. Aachen 1934

Die Hauptschwierigkeit derartiger Untersuchungen bei hohen Feldstärken, über deren Weiterführung dieser Aufsatz berichten soll, besteht nun einmal in den Unsicherheiten der Meßmethode, sodann in dem nur mangelhaft

1) P. Weiß, Journ. d. Phys. (4) **9**, 386, 1910.
2) W. Steinhaus und E. Gumlich, Arch. f. Elektrotechn. **4**, 89, 1915.

1) P. Weiß und R. Forrer, Ann. de phys. (10) **12**, 279, 316, 1929.
2) N. S. Akulov, Zeitschr. f. Phys. **69**, 822, 1931.
3) E. Czerlinsky, Ann. Phys. (5) **13**, 80, 1932.
4) Für eine Dichte von 7,878.

bekannten Einfluß, den physikalische und chemische Zustände auf das magnetische Verhalten ausüben.

Hinsichtlich der Meßmethode hat man die Auswahl zwischen der Untersuchung in einer Spule bei freien Probenenden oder in einem mehr oder weniger gut geschlossenen magnetischen Kreis (Joch, Elektromagnet). Beim ersteren Weg, bei dem sich die Feldstärke berechnen läßt, ist die Erzeugung genügend hoher und konstanter Spulenfelder über größere Räume (die Benutzung kleiner Proben kommt wegen der Ungenauigkeit der Formgebung kaum in Frage) nur schwer bzw. unter Einsatz größter Mittel durchzuführen. Der Nachteil der zweiten Methode, die große Feldstärken ohne weiteres zu erreichen gestattet, besteht vor allem in der Rückwirkung der Probe auf den übrigen magnetischen Kreis [Images magnétiques[1]] bzw. in der Ungenauigkeit der Extrapolation auf die Eisenoberfläche bei der Feldstärkenbestimmung. Über die von uns benutzte Jochisthmusmethode, die eine Abwandlung des zweiten Verfahrens darstellt, wird unten berichtet werden.

Um sich von dem Einfluß mechanischer und chemischer Faktoren zu befreien, hat man bisher meist versucht, völlig reines Eisen herzustellen und seine Eigenschaften zu messen, wie es zuletzt etwa Adcock und Bristow[2]) zur Gewinnung anderer physikalischer Werte getan haben. Ebenso möglich — und dies ist der von uns beschrittene Weg — scheint jedoch auch eine genaue Bestimmung des Einflusses dieser Faktoren zu sein, von wo aus wir dann über genau definierte Proben hohen Reinheitsgrades eine Extrapolation auf den Wert absolut reinen Eisens versucht haben.

B. Untersuchungsverfahren, benutzte Proben.

a) Absolute Methode.

Die absolute Messung der Proben erfolgte nach einer Abänderung der von Gumlich[3]) angegebenen und vielfach beschriebenen Jochisthmusmethode, bei der die Magnetisierung der Probe zum Teil von einem Joch (Elektromagneten) aufgedrückt, zum Teil durch eine Spule erzeugt wird. Als Probekörper dienen Zylinder, die den Isthmus zwischen den beiden Kernen bilden und in denen die wahre Feldstärke mit Hilfe eines Systems von konzentrischen Tangentialspulen bestimmt wird. Das Schema der Anordnung ist in Abb. 1 dargestellt. In ihr bedeuten: A die Jochschenkel, B die Feldspulen, C einen Kühler, D die Polkerne, E die Probe und F das System konzentrischer Spulen über dem Isthmus, die mit dem ballistischen Galvanometer verbunden sind.

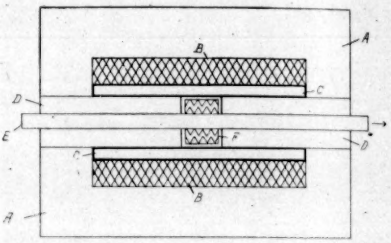

Abb. 1. Schema der Jochisthmus-Methode

Abweichend von dem üblichen Meßverfahren durch Kommutieren des Magnetisierungsstromes haben wir hier durch Herausziehen der Probe aus dem Interferrikum nicht die Induktion $\mathfrak{B}$, sondern die Werte $\mathfrak{B}-\mathfrak{H}=4\pi\mathfrak{J}$ direkt gemessen. An den so erhaltenen Zahlen war dann nur noch eine Korrektur anzubringen, die die Änderung der wahren Feldstärke innerhalb der innersten, unmittelbar auf der Probenoberfläche sitzenden Spule beim Herausziehen der Probe berücksichtigt, und zwar gilt $4\pi\mathfrak{J}_{korr}=4\pi\mathfrak{J}_{gem}-A\,(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}''')$, wobei A der Quotient aus Spulenquerschnitt und Stabquerschnitt, $\mathfrak{H}$ die aus der Extrapolation des Spulensystems erhaltene wahre Feldstärke im Eisen und $\mathfrak{H}'''$ die besonders gemessene Feldstärke im Meßraum nach Entfernung der Probe ist. Die Größe dieser Korrektur liegt zwischen 1 Prozent und 1 Promille.

Eine Fehlerrechnung unter Berücksichtigung aller in Betracht kommenden Unsicherheiten, einschließlich der notwendigen Korrekturen, ergibt für die in Abb. 2 dargestellten Messungen des Magnetisierungsverlaufs bei Feldstärken zwischen 300 und 8500 Gauß (Mittelwert aus 36 Beobachtungsreihen) einen wahrscheinlichen Fehler von $\pm$ 0,3 Promille.

Bei noch höheren Feldstärken war mit der vorhandenen Anordnung diese Meßgenauigkeit nicht mehr zu erreichen; infolgedessen wurden diese Messungen für die Auswertung nicht in Betracht gezogen.

1) Vgl. dazu die Erörterungen von Weiß und Forrer (l. c.) sowie von Gerloff, Zeitschr. f. Phys. **99**, 585, 1936.

2) F. Adcock und C. A. Bristow, Proc. Roy. Soc. London (A) **153**, 172, 1936.

3) E. Gumlich, Arch. f. Elektrotechn. **2**, 461, 1914.

b) Differentialmethode.

Wegen der großen Zahl der notwendigen Untersuchungen wurde weiterhin eine einfache Vergleichsmethode entwickelt, die es gestattet, selbst sehr geringe Differenzen in $4\pi\mathfrak{J}$ genau zu messen. Die Anordnung besteht aus einem Elektromagneten mit Polflächen von etwa 100 cm², in dessen Interferrikum im gegenseitigen Abstand von 1 cm zwei gleichdimensionierte Induktionsspulen (je 336 Windungen) angebracht und in Gegenschaltung mit einem hochempfindlichen Supergalvanometer von Siemens & Halske, das hier als Fluxmeter arbeitete, verbunden waren. Wurden in die Spulen zwei genau gleiche (20 mm lange und 6 mm dicke) Proben eingeführt und der Magnet zwischen $+\mathfrak{H}_{max}$ und $-\mathfrak{H}_{max}$ zyklisch erregt, so mißt das Fluxmeter im Sättigungsgebiet den Unterschied des Flusses dieser beiden Proben. Durch Umtausch der Stücke lassen sich alle noch vorhandenen Unsymmetrien eliminieren, so daß bei bekanntem Verlauf der Induktionskurve der einen Probe die der anderen bestimmt werden kann.

Die Eichung der Differentialanordnung erfolgte durch Vergleich von 7 Proben eines absolut gemessenen Werkstoffes, deren Durchmesser um je 0,1 mm abgestuft waren. Die möglichen Fehler der Meßmethode sind geringer als 0,1 Promille für $4\pi\mathfrak{J}$, d. h. es können Unterschiede von etwa 2 Induktionslinien noch festgestellt werden; doch wird diese hohe Genauigkeit bei laufenden Messungen verschiedener Proben durch die Längen- bzw. Querschnittsbestimmung beeinträchtigt, so daß sie nur bei ein- und demselben Stück, etwa nach verschiedener Behandlung, voll erreicht werden kann.

c) Werkstoffe.

Bei den untersuchten Werkstoffen haben wir 3 Gruppen zu unterscheiden:

1. reinstes Eisen,
2. technische Eisensorten,
3. Eisenlegierungen.

Zur Untersuchung reinsten Eisens standen 7 Proben verschiedener Herkunft zur Verfügung, und zwar

4 Proben aus Wemco-Research-Eisen, Gesamtverunreinigungen nach der durchgeführten Analyse geringer als 0,05 Proz., größte Verunreinigung (*Si*) 0,01 Proz., *C*-Gehalt 0,002 Proz., die wir der Freundlichkeit von T. D. Yensen verdanken;

1 Probe Karbonyleisen, gesintert und in feuchtem Wasserstoff bei hoher Temperatur noch besonders entkohlt. Kohlenstoffgehalt wahrscheinlich unter 0,004 Proz., genaue Analyse nicht bekannt, nach den Durchschnittsanalysen jedoch geringe *Ni*-Mengen (0,005 bis 0,01 Proz.) enthaltend.

2 Proben mehrfach raffiniertes Elektrolyteisen verschiedener Herstellung, die eine ungeschmolzen, die andere vakuumgeschmolzen; *C*-Gehalte um 0,007 Proz.

Als Maß für die Reinheit dieser Proben dienen außer der Analyse die Werte des Temperaturkoeffizienten des spezifischen elektrischen Widerstandes zwischen 0 und 100° C; sie liegen (vgl. Zahlentafel VI) zum Teil noch höher als die von Adcock und Bristow[1]) für reinstes Eisen angegebenen Zahlen (etwa 0,0057). Da jedoch der Temperaturkoeffizient nicht immer ein exaktes Maß für die Reinheit zu sein braucht — so sind von Holborn[2]) Temperaturkoeffizienten an Eisen bis 0,0066 ermittelt worden, obwohl das von ihm benutzte Material nach Messungen bei tiefen Temperaturen[3]) zweifellos weniger rein war —, hat Herr Dr. Steiner vom Kältelaboratorium der Reichsanstalt an einigen dieser Proben freundlicherweise ebenfalls das Widerstandsverhältnis $\frac{R_{20}}{R_{273}}$ ermittelt. Die erhaltenen Werte (vgl. Zahlentafel VI), die nahezu gleich dem Restwiderstand sind, liegen für die erst genannten Proben in der Größe von einigen Prozent, für die letztgenannten bei einigen Promille und entsprechen in ihrer Kleinheit den reinsten bisher überhaupt untersuchten Eisensorten[3]). — Alle Proben waren geglüht und hatten keine merkliche Vorzugsrichtung.

An technischen Eisensorten von verschiedener Herstellung, Reinheit und Behandlung wurden etwa 30 Proben untersucht. Eine Auswahl der Meßergebnisse mit den zugehörigen Analysen ist in Zahlentafel III angegeben.

Die Untersuchung des Einflusses der Zusätze erstreckte sich auf etwa 45 Legierungen mit genau bekannten Gehalten an *Al*, *C*, *Cr*, *Cu*, N_2, *Ni*, *Mn*, O_2, *P*, *S*, *Si* (im allgemeinen zwischen 0,5 und 5 Proz.), die zum Teil im Hochfrequenzofen aus doppelt raffiniertem Elektrolyteisen als Ausgangsmaterial selbst erschmolzen, teils freundlicherweise zur Verfügung gestellt waren.

C. Ergebnisse.

a) Annäherungsgesetz.

Zur Beschreibung des magnetischen Verhaltens bei hohen Feldstärken benutzen wir

1) l. c.
2) L. Holborn, Ann. Phys. (4) **59**, 145, 1916.
3) Vgl. W. Meißner und B. Voigt, Ann. Phys. (5) **7**, 761, 1930.

zweckmäßig den Verlauf der Suszeptibilität $\frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}} = \varkappa$ in Abhängigkeit von der Magnetisierung $\mathfrak{J}$, eine Darstellung, die mit der von Weiß und Mitarbeitern[1]) benutzten Funktion $\mathfrak{J} = f\left(\frac{1}{\mathfrak{H}}\right)$ bei Spiegelung und Koordinatenvertauschung praktisch zusammenfällt.

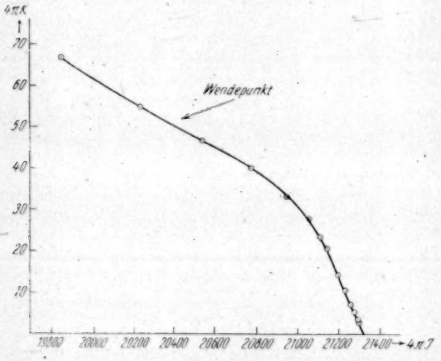

Abb. 2. Endabschnitt der $4\pi\varkappa$-Kurve eines Flußeisens.

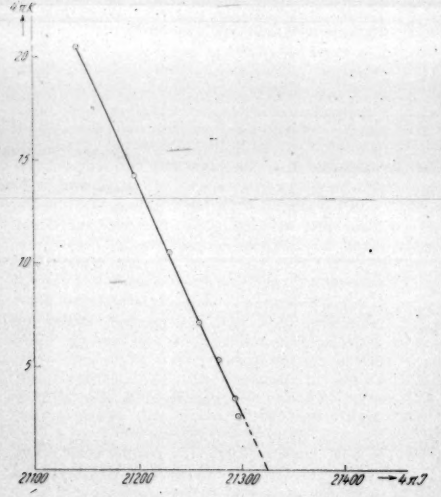

Abb. 3. Wie Abb. 2 in vergrößertem Maßstab.

1) l. c.

Als Ergebnis der Untersuchungen finden wir zwei charakteristische Merkmale dieses Suszeptibilitätsverlaufes: Von mittleren Intensitäten zur Sättigung kommend verläuft die $\varkappa$-$\mathfrak{J}$-Kurve nicht in einem glatten Linienzug, sondern zeigt einen Wendepunkt, der durch eine Ausbuchtung[1]) in der Gegend von 0,98 $\mathfrak{J}_\infty$ bedingt ist. An ihn schließt sich dann ein linearer Abfall zu hohen Intensitäten an. Als Beispiel für die erhaltenen Kurven diene die Zahlentafel II, die die Magnetisierungs- und Feldstärkenwerte für ein technisches Flußeisen enthält, sowie die Abb. 2 und in stärkerer Vergrößerung Abb. 3, in der $\varkappa = f(\mathfrak{J})$ zeichnerisch aufgetragen ist.

Zahlentafel II.

Magnetisierungskurve von Flußeisen V 113 im Sättigungsbereich.

Feldstärke $\mathfrak{H}$	Magnetisierung $4\pi\mathfrak{J}$	Suszeptibilität $4\pi\varkappa$
300	19850	66,6
370	20230	54,7
440	20540	46,3
520	20770	40,0
640	20950	33,0
760	21060	27,6
900	21110	23,4
1030	21142	20,6
1490	21197	14,25
2015	21232	10,55
2985	21260	7,13
3980	21279	5,35
6130	21294	3,48
8190	21296	2,60

Die Ausbuchtung in der $\varkappa$-$\mathfrak{J}$-Kurve, die schon früher von Steinhaus und Gumlich gefunden wurde, beruht zweifelsohne auf der kristallographischen Anisotropie des Eisens bzw. der Tatsache, daß die Magnetisierungskurve eines Einkristalls beim Übergang in die Sättigung in der Flächendiagonale eine Richtungsänderung, in der 111-Richtung aber einen Sprung und in der 100-Achse einen stetigen Verlauf zeigt. Die dadurch bedingten

1) Die im amerikanischen Schrifttum übliche Darstellung der Reluktivität $\frac{1}{\mu} = f(\mathfrak{H})$ läßt natürlich diese Anomalie nicht hervortreten, so daß vielfach die Meinung besteht, daß die so aufgetragene Kurve bei reinstem *Fe* eine gerade Linie darstellt (vgl. C. Nusbaum, W. L. Cheney, H. Scott, Scient. Pap. Bur. of Standards Nr. 404, 1920). Eine Auftragung der Originalzahlen von $\frac{1}{\mu}$-Kurven nach $\mathfrak{J}$, beispielsweise aus der Arbeit von B. O. Peirce, Proc. Amer. Acad. Arts and Sc. **49**, 115, 1914, zeigt jedoch deutlich die Ausbuchtung.

Verschiedenheiten der Permeabilität in den verschiedenen Richtungen, die experimentell beispielsweise von Honda und Kaya[1]) und Kaya und Takaki[2]) untersucht sind [vgl. dazu die theoretischen Erörterungen von Akulov[3])] müssen naturgemäß bei einem Polykristall so zum Ausdruck kommen, als ob der Stoff aus magnetisch verschieden harten Bestandteilen zusammengesetzt ist, d. h. es muß sich auf der $\varkappa$- bzw. μ-Kurve eine Ausbuchtung zeigen [vgl. Gumlich[4])], so daß hier das Annäherungsgesetz

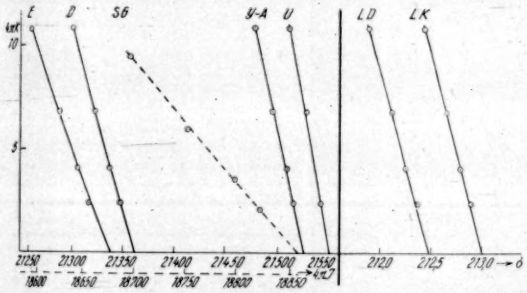

Abb. 4.
$4\pi\varkappa$-Kurven von Eisen und Eisenlegierungen im Sättigungsgebiet.
(E = Armco-Fe; D = Siemens-Martin-Fe; SG = Fe + 10 Proz. Cr; Y-A = Wemco Res.-Fe; U = Karbonyl-Fe; LD = Fe + 2,3 Proz. Cu; LK = Fe + 2,2 Proz. Al.

sicher nicht das Glied $\frac{1}{\mathfrak{H}}$, sondern eine höhere Potenz der Feldstärke enthält.

Der anschließende geradlinige Teil der $\varkappa$-Kurve oberhalb 0,99 $\mathfrak{J}_\infty$ bedeutet dagegen ein mit $\frac{1}{\mathfrak{H}}$ verlaufendes Gesetz, wie es von Weiß und Mitarbeitern sowie von Steinhaus und Gumlich gefunden wurde.

Zur Beurteilung der Genauigkeit des geradlinigen Verlaufes ist zu berücksichtigen, daß die größte Abweichung der Meßpunkte von der Geraden bei den absoluten Messungen der Abb. 2 bzw. 3 etwa 0,2 Promille beträgt, d. h. also innerhalb des wahrscheinlichen Fehlers liegt. Zur Kontrolle der Geradlinigkeit und zur Feststellung, ob diese nicht etwa durch einen verborgenen systematischen Fehler vorgetäuscht ist, haben wir mittels der Differentialmethode etwa 50 Proben von Eisensorten und Legierungen untereinander verglichen. Trotz sehr verschiedener Neigung[1]) – einige Beispiele dieser Messungen sind in Abb. 4 dargestellt – ließ sich auch hier in keinem einzigen Falle eine Krümmung nachweisen. Da es unwahrscheinlich ist, daß sich ein vorhandener Fehler bei all diesen verschiedenen Stoffen genau im gleichen Maße auswirken, d. h. die gleiche Krümmung verschleiern sollte, so ist auch dies eine weitere Stütze für den geradlinigen Verlauf des Endabschnitts der $\varkappa$-$\mathfrak{J}$-Kurven.

Zum Vergleich unserer Messungen mit den abweichenden Ergebnissen von Czerlinsky[2]) haben wir einige beobachtete absolute Kurven differentiert und aus den erhaltenen $\frac{d\varkappa}{d\mathfrak{J}}$ die Werte $\frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}}$ mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}} = \frac{\varkappa}{1 + \mathfrak{H}\,\frac{d\varkappa}{d\mathfrak{J}}}$$

berechnet und nach $\frac{1}{\mathfrak{H}^2}$ in Abb. 5 und 6 dargestellt. Eine Betrachtung des Kurvenverlaufs insbesondere der Abb. 5, in der außer unserer Kurve auch die Meßpunkte von Czerlinsky eingetragen sind, zeigt nun, daß in dem Feldstärkenbereich, in dem Czerlinsky gemessen hat, in der Tat die Kurve geradlinig ist, d. h. ein $\frac{1}{\mathfrak{H}^2}$-Gesetz besteht. Bei höheren Feldstärken dagegen verläuft die $\frac{d\mathfrak{J}}{d\mathfrak{H}}$-Kurve (entsprechend dem $\frac{1}{\mathfrak{H}}$-Gesetz) in dieser Darstellung gekrümmt. Diese Erscheinung hat Czerlinsky bei Fe infolge seiner zu geringen Feldstärke nicht finden können, dagegen hat er sie bereits für Ni sichergestellt. Umgekehrt mußten Weiß und Forrer entsprechend ihren höheren Feldstärken ebenfalls das $\frac{1}{\mathfrak{H}}$-Gesetz finden.

Zusammenfassend ergibt sich, daß man in dem Bereich, in dem sich die kristallographische

1) K. Honda und S. Kaya, Sc. Rep. Tohok. Univ. 15, 721, 1926.
2) S. Kaya und H. Takaki, Journ. of Fak. of Sc. Hokkaido Univ. Japan (II) 1, 227, 1935.
3) N. S. Akulov, Zeitschr. f. Phys. 69, 78, 1931.
4) E. Gumlich, Arch. f. Elektrotechn. 9, 153, 1920.

1) Für die Größe des Neigungswinkels und damit die Konstanten des Annäherungsgesetzes hat sich zunächst kein unmittelbarer Zusammenhang mit der Koerzitivkraft bzw. der Anfangspermeabilität ergeben. Es hat den Anschein, als ob sie von dem Gehalt an Fremdstoffen abhängt.
2) l. c.

Anisotropie noch bemerkbar macht, mit einem Verlauf der Magnetisierung mit $\frac{1}{\mathfrak{H}^2}$ rechnen kann, während bei stärkerer Annäherung an die Sättigung zweifellos das $\frac{1}{\mathfrak{H}}$-Gesetz gilt, so daß sich die Widersprüche des Schrifttums durch die Verschiedenheit der benutzten Feldstärken aufklären.

Auf die theoretischen Folgerungen soll hier nicht eingegangen werden; es sei nur erwähnt, daß nach Becker[1]) der mit der reziproken Feldstärke lineare Verlauf nicht mit der Annahme von Drehprozessen der Elementarmagnete verträglich ist.

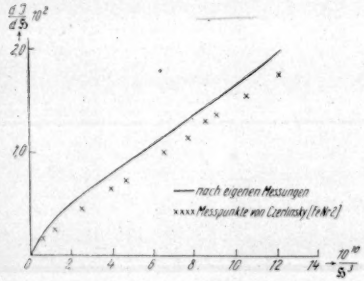

Abb. 5. Differentielle Suszeptibilität eines Flußeisens (wie Abb. 2) bei hohen Feldstärken.

b) Sättigungswerte.

Für den Kurvenverlauf bei höheren, von uns in der benutzten Anordnung nicht mehr genügend sicher meßbaren Feldstärken wurde angenommen, daß der im vorigen Abschnitt erwähnte gradlinige Teil der χ-$\mathfrak{H}$-Kurve sich auch weiter geradlinig fortsetzt. Der Sättigungswert

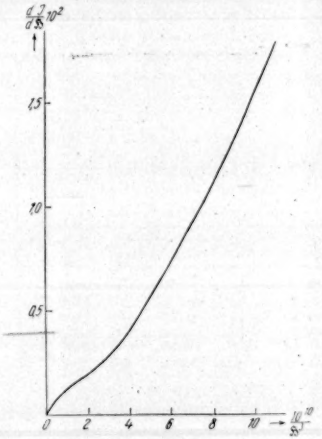

Abb. 6. Differentielle Suszeptibilität von Karbonyleisen.

Zahlentafel III.

Eigenschaften technischer Eisensorten.

Bezeichnung und Hauptverunreinigungen	Dichte	Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes $\frac{1}{R_{273}}\frac{R_{373}-R_{273}}{100}$	Koerzitivkraft $\mathfrak{H}c$	Sättigungswert bei Raumtemperatur $4\pi\mathfrak{J}_\infty$	σ_∞
(geglüht bei 950°; abgekühlt bis 680°, dann in Luft abgeschreckt)					
Armco-Eisen ($C = 0{,}05$ Proz., $Mn = 0{,}06$ Proz. $Si = 0{,}01$ Proz., $P = 0{,}008$ Proz. $S = 0{,}02$ Proz., $Cu = 0{,}05$ Proz.)	7,850	$0{,}55 \cdot 10^{-2}$	0,92	21340	216,34
S. M.-Eisen ($C = 0{,}04$ Proz., $Mn = 0{,}4$ Proz. $Cu = 0{,}14$ Proz., $P = 0{,}03$ Proz. $S = 0{,}02$ Proz.)	7,858	$0{,}44 \cdot 10^{-2}$	1,08	21361	216,33
Thomas-Eisen ($C = 0{,}05$ Proz., $Mn = 0{,}3$ Proz. $S = 0{,}06$ Proz., $P = 0{,}05$ Proz.)	7,849	$0{,}48 \cdot 10^{-2}$	1,32	21377	216,74
Elektrolyt-Eisen, technische Qualität $C = 0{,}01$ Proz., $Mn = 0{,}03$ Proz., $Cu = 0{,}01$ Proz., $Si = 0{,}005$ Proz. $P = 0{,}005$ Proz.)	—	$0{,}56 \cdot 10^{-2}$	0,40	—	217,61

1) Vgl. R. Becker, in: Leipziger Vorträge 1933 (Magnetismus; Verlag S. Hirzel in Leipzig 1933), S. 82.

ergibt sich dann als Schnittpunkt dieser Geraden mit der Abszissenachse. Es ist ferner zweckmäßig, die absoluten Angaben der Sättigungsmagnetisierung in σ-Werten (Moment je Gramm) an Stelle der ϑ-Werte (Moment je cm^3) zu machen, weil sie von der Porosität der Proben unabhängig sind und damit erst den eigentlichen Wert der Sättigung darstellen.

Handelsübliche Eisensorten: Die Ergebnisse einer ersten Gruppe von Messungen an technischen Eisensorten (Flußeisen und Elektrolyteisen üblicher Qualität) sind nebst den Angaben über Fremdstoffe, Dichte, Koerzitivkraft und Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes zwischen 0 und 100° C in Zahlentafel III zusammengestellt.

Änderung der spez. Sättigung von abgeschrecktem Siemens-Martin-Eisen ($\sigma_\infty = 216{,}33$) beim Anlassen.

Anlaßtemperatur	Anlaßdauer in Stunden		
	20	40	100
100°	−0,10	−0,15	−0,15
200°	−0,22	−0,18	−0,26
300°	−0,20	−0,17	−0,22
500°	−0,17	−0,27	−0,10

Die Sättigungswerte stimmen innerhalb der durch die Zusammensetzung bedingten Schwankungen mit den von Gumlich, Weiß und Ferrer, Honda und Kaya u. a. an Eisensorten ähnlichen Reinheitsgrades ermittelten Zahlen überein. Der von Ostermann (vgl. Zahlentafel I) angegebene, um etwa 5 Proz. größere Wert für Eisen kann also nur auf einem Versagen der Meßmethode beruhen.

Am Schluß der Zahlentafel sind als Beispiel die Änderungen aufgeführt, die die spez. Sättigung eines technischen Eisens beim Anlassen nach vorangegangenem Abschrecken von 680° erfährt und die durch die Ausscheidung von Begleitelementen bedingt sind, die beim Abschrecken in übersättigter Lösung bleiben; eine quantitative Auswertung ist bei der Menge der Verunreinigungen infolge ihrer gegenseitigen Beeinflussung hier nicht durchführbar.

Einfluß von Zusätzen und Behandlungsverfahren: Zur Untersuchung der Frage, wie die Fremdstoffe den Sättigungswert des Eisens quantitativ beeinflussen, haben wir, wie bereits oben ausgeführt, an etwa 45 Legierungen den Einfluß der hauptsächlichsten Eisenbegleiter einzeln untersucht. Aus den gewonnenen Ergebnissen, auf die wir an anderer Stelle noch zurückkommen möchten, berechnen sich für die Änderungen von σ_∞ für je 1 Promille Zusatz die Zahlen der folgenden Zahlentafel IV. Für den Zusatz von Nickel ist der Verlauf in Abb. 7 zeichnerisch dargestellt.

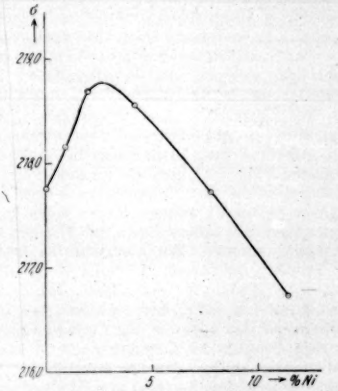

Abb. 7. Spezifische Sättigung von *Fe-Ni*-Legierungen.

Zahlentafel IV.

Änderung der spezifischen Magnetisierung σ_∞ für 1 Promille des Fremdstoffes.

Al	−0,26
C (in α-Fe gelöst)	−1,2
C (als Cementit)	−1,6
Cr	−0,24
Cu	−0,23
Mn	−0,19
N	~ −0,6
Ni	+0,04
O	~ −0,2
P	−0,3
S	−0,7

Die Sättigungskonzentrationskurven, aus denen diese Werte gewonnen sind, stellen bei geringen Konzentrationen gerade Linien dar, die genau in dem gleichen Punkt für das zusatzfreie Ausgangsmaterial zusammenlaufen. Die Möglichkeit, daß bei allerkleinsten Gehalten eine Abweichung von der Proportionalität eintreten könnte, ist daher sehr gering, und so erledigt sich auch die bekannte Frage, ob nicht absolut reines Eisen noch eine wesentlich höhere Sättigung haben könnte.

Beim Kohlenstoff interessierte besonders der Einfluß desjenigen Anteils, der sich im α-Eisen in Lösung befindet, während die Wirkung des als Cementit ausgeschiedenen *C* hinreichend bekannt ist und auch von uns in

Übereinstimmung mit Gumlich[1]) zu 1,6 in σ für 0,1 Proz. C gefunden wurde. Zur Untersuchung dieser Frage haben wir bei zwei C-Legierungen mit 0,015 und 0,03 Proz. C durch Glühen und Abschrecken von 680° den C einmal in übersättigte Lösung gebracht und sodann durch Anlassen bei verschiedenen Temperaturen mehr oder weniger ausgeschieden. Unter Zugrundelegung der Löslichkeitskurve[2]) läßt sich aus dem Unterschied der Sättigungswerte der Einfluß des C berechnen, und zwar ergab sich, daß 0,1 Proz. C im α-Eisen gelöst die spezifische Magnetisierung des Eisens um 1,2 erniedrigt.

Der Einfluß des Stickstoffs konnte nur ungenau bestimmt werden, da uns leider keine Legierungen aus reinem Eisen mit N allein zur Verfügung standen. Wir beobachteten jedoch an Proben, die neben geringen C-Gehalten 0,02—0,03 Proz. N enthielten, nach Abschreckung von 680° und Anlassen bei 100° Änderungen von etwa 0,1—0,2 Einheiten in σ_∞, die dem Einfluß des C entgegengesetzt waren und wahrscheinlich dem N zukommen. Zur Untersuchung des Sauerstoffeinflusses standen uns 8 Proben zur Verfügung, die bei C-Gehalten von 0,001—0,003 in ihren O_2-Gehalten von 0,01—0,1 Proz. schwankten. Ihnen entsprachen Abnahmen des σ_∞-Wertes gegenüber dem Wert des Ausgangsmaterials von 0,03—0,22.

Zur qualitativen Feststellung der Wirkung von Wasserstoff untersuchten wir eine Probe, die aus einer niedergeschlagenen Platte doppelt raffinierten Elektrolyteisens einmal direkt herausgeschnitten war, im Ausgangszustand und sodann nach einer längeren Glühung bei 930° im Vakuum. Die Untersuchung ergab folgende Zahlenwerte der spezifischen Sättigung sowie der als Kontrolle der Eigenschaftsänderungen gemessenen Koerzitivkräfte und Restwiderstände bei tiefen Temperaturen:

Behandlung	Koerzitivkraft in Gauß	Widerstandsverhältnis $\frac{R_{20}}{R_{273}}$	Spezifische Sättigung σ_∞
Unbehandelt	6,88	0,0087	217,81
bei 930° geglüht	0,25	0,0074	217,87

also eine geringe, aber gerade noch sichere Änderung in σ_∞.

Schließlich wurde die Frage, welchen Einfluß Eigenspannungen auf den Sättigungswert haben, an zwei verschiedenen Proben durch Messung des Einflusses einer Kaltverformung (Walzen) und einer nachfolgenden Entfestigung durch Glühen untersucht. Es ergaben sich die nachstehenden Zahlen, welche zeigen, daß bei der Verfestigung in $4\pi\vartheta_\infty$ ein deutlicher Unterschied im Sinne einer Verringerung auftritt, der sich aber ohne weiteres aus der Abnahme der Dichte erklärt, so daß die auf die Masseneinheit bezogene spezifische Magnetisierung innerhalb der Meßgenauigkeit konstant bleibt.

Zahlentafel V.

Einfluß einer Verfestigung auf die Eigenschaften.

Werkstoff	Kalt verformt			Bei 930° geglüht		
	Dichte	$4\pi\vartheta_\infty$	σ_∞	Dichte	$4\pi\vartheta_\infty$	σ_∞
Elektrolyteisen	7,847	21460	217,63	7,850	21467	217,62
Wemco-Res.-Eisen ..	—	—	217,71	—	—	217,72

Messungen an reinstem Eisen; Extrapolation auf Verunreinigung 0:

Die Sättigungsmagnetisierungen der oben (S. 779) genannten reinsten Eisenproben sind zusammen mit den Zahlenwerten des Temperaturkoeffizienten des elektrischen Widerstandes, der Dichte und Koerzitivkraft in Zahlentafel VI wiedergegeben.

Durch eine Wärmebehandlung wurde kontrolliert, daß diese Proben beim Abschrecken und Anlassen keine Änderungen der spezifischen Sättigung zeigen, d. h. also nach Ausweis der Zustandsdiagramme insbesondere keine wesentlichen Gehalte von C, O_2, N_2 oberhalb der Löslichkeitsgrenze besitzen können.

Unter Berücksichtigung der im vorigen Abschnitt gewonnenen Zahlen für den Einfluß der Beimengungen haben wir die Sättigungswerte der 7 reinsten Eisenproben, soweit bekannt, auf ihre Verunreinigungen korrigiert, und zwar erhöht sich dadurch die spezifische Magnetisierung der Proben aus Wemco-Res-*Fe* und aus Carbonyleisen um je etwa 0,17 bzw. 0,05 Einheiten, der der beiden Elektrolyteisenstücke um 0,17 bzw. 0,14.

Nach Anbringung dieser Korrekturen ergibt sich als Mittel und damit als wahrscheinlichster Wert für die Sättigung völlig reinen Eisens bei Raumtemperatur

$$\sigma_\infty = 217{,}98 \pm 0{,}1\,,$$

d. h. bei einer angenommenen Dichte von 7,87 eine Magnetisierung

$$4\pi\vartheta_\infty = 21580 \pm 10\,.$$

1) Gumlich, Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.

2) Vgl. W. Köster, Arch. f. Eisenhüttenwesen **2**, 509, 1928/29.

Zahlentafel VI.

Meßergebnisse an reinsten Eisensorten.

Werkstoff und Hauptverunreinigungen	Dichte	Temperaturkoeffizient des elektrischen Widerstandes $\frac{1}{R_{273}}\frac{R_{373}-R_{273}}{100}$	Widerstandsverhältnis $\frac{R_{20}}{R_{273}}$	Koerzitivkraft	Sättigungswert bei Raumtemperatur $4\pi\vartheta_\infty$	σ_∞
Wemco-Res.-Eisen ($C = 0{,}002$ Proz., $Cu = 0{,}001$ Proz. $Mn = 0{,}003$ Proz., $O_2 = 0{,}01$ Proz. $P = 0{,}003$ Proz., $S = 0{,}005$ Proz. $Si = 0{,}01$ Proz.)	7,866	$0{,}56 \cdot 10^{-2}$	0,04	0,30	21526	217,88
		$0{,}55 \cdot 10^{-2}$		0,27	21550	217,77
		$0{,}54 \cdot 10^{-2}$		0,24	21512	217,86
		$0{,}56 \cdot 10^{-2}$		0,28	21513	217,75
Reines Carbonyl-Eisen ($C < 0{,}004$ Proz., geringe Mengen Ni [0,005—0,01])	7,876	$0{,}59 \cdot 10^{-2}$	0,02	0,20	21549	217,84
Dopp. raff. Elektrolyteisen, vakuumgeschmolzen ($C = 0{,}008$ Proz., $O_2 = 0{,}015$ Proz., $S = 0{,}001$ Proz., $Si = 0{,}008$ Proz., Spur. Pund Mn)	7,870	0,59	0,018	0,30	21534	217,85
Mehrf. raff. Elektrolyteisen, nicht geschmolzen, geglüht ($C = 0{,}007$ Proz., $Cu = 0{,}01$ Proz., Sp, Si, P, Mn. u. a.)	7,873	0,61	0,007	0,25	21544	217,87

Diese Werte gelten natürlich, wie eingangs dieses Abschnittes schon erwähnt, nur unter der Voraussetzung, daß das gefundene Annäherungsgesetz auch bei Feldstärken oberhalb $\mathfrak{H} = 9000$ noch Gültigkeit hat. Sie stimmen auf 0,9 Promille mit den von Weiß und Forrer für Eisen gefundenen Zahlen (Mittel $\sigma = 217{,}79$) überein.

An der Herstellung und Behandlung der Proben sowie der Durchführung der umfangreichen Messungen waren beteiligt die Herren Licht, Blonner, Jakob und Welzel. Für die vielfache Unterstützung durch Überlassung von Proben und Analysen danken wir weiter den Herren Dr. Rohn (Heraeus Vakuum-Schmelze), Dr. Stäblein (Versuchsanstalt der Friedrich Krupp A.-G.) und Ing. Buscher (Mitteldeutsche Stahlwerke, Berlin-Hennigsdorf). Zu besonderem Dank sind wir schließlich Herrn T. D. Yensen (Westinghouse, El. & Man. Comp.) verpflichtet, der uns zu Vergleichszwecken eine größere Anzahl Proben amerikanischer Herkunft freundlichst zur Verfügung gestellt hat.

Zusammenfassung.

1. Mittels einer Joch-Isthmusanordnung (absolutes Verfahren) und einer Differentialmethode hoher Genauigkeit wurde an verschiedenen Sorten reinsten polykristallinen Eisens, an technischem Eisen und Eisenlegierungen der Verlauf der Magnetisierung im Sättigungsgebiet (Annäherungsgesetz), die Sättigungsintensität selbst und ihre Beeinflußbarkeit durch Legierungszusätze, Kaltverformung und Wärmebehandlung untersucht.

2. Es wurde gefunden, daß die Form des Annäherungsgesetzes in verschiedenen Feldstärkenbereichen verschieden ist und daß etwa 2 Proz. unterhalb der Sättigung ϑ mit $1 - \frac{\text{const}}{\mathfrak{H}^2}$, bei höheren Intensitäten dagegen mit $1 - \frac{\text{const}}{\mathfrak{H}}$ verläuft.

3. Unter der Annahme der Gültigkeit der letzteren Formel bis zu $\mathfrak{H} = \infty$ wird als spezifische Sättigung des absolut reinen Eisens bei Raumtemperatur $\sigma_\infty = 217{,}98 \pm 0{,}1$, d. h. bei einer Dichte von 7,878 eine Magnetisierung $4\pi\vartheta_\infty = 21580 \pm 10$ extrapoliert.

Berlin-Charlottenburg, Juli 1937.

(Eingegangen 22. Juli 1937.)

Experimentelle Untersuchung über den Einfluß des Gefäßbodens auf die Fallbewegung von Kugeln in zähen Flüssigkeiten.

Von Friedrich Altrichter
und Alfred Lustig.

I. Einleitung.

Mit der Änderung des Bewegungswiderstandes von Kugeln in zähen Flüssigkeiten infolge einer senkrecht zur Bewegungsrichtung liegenden ebenen Wand – im folgenden kurz Bodeneinfluß genannt – haben sich bis jetzt nur sehr wenige Arbeiten beschäftigt. Während der Einfluß von zur Bewegungsrichtung parallelen Wänden theoretisch ausführlich behandelt worden ist (vgl. die Arbeiten von H. A. Lorentz[1]), R. Ladenburg[2]), J. Stock[3]) und H. Faxén[4])), liegt für den Bodeneinfluß nur die Theorie von H. A. Lorentz[1]) vor.

H. A. Lorentz berechnete nach einer für alle später aufgestellten „Wandeinflußtheorien" grundlegenden Methode den Widerstand W, den eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit in der Nähe einer vertikal zur Bewegungsrichtung befindlichen Wand erfährt, zu $W = 6\pi\mu a v\left(1 + \frac{9}{8}\frac{a}{z}\right)$. a ist der Kugelradius, μ die Zähigkeit der Flüssigkeit, v die Geschwindigkeit der Kugel und z der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Boden. (Da die Bewegung nicht stationär ist, ersetzt H. A. Lorentz den Widerstand der Kugel mit der Momentangeschwindigkeit v durch den Widerstand, den eine gleichförmig mit der Geschwindigkeit v bewegte Kugel erfährt[5]). Die obige Formel ist unter folgenden Voraussetzungen abgeleitet: Gültigkeit der Bewegungsgleichungen zäher, inkompressibler Flüssigkeiten in der von Stokes[6]) benutzten Form (Vernachlässigung der Trägheitsglieder, d. h. Kleinheit der Reynoldsschen Zahl), Starrheit der Kugel und Haften der Flüssigkeit an der Kugeloberfläche. Weiter ist vorausgesetzt, daß $\left(\frac{a}{z}\right)^2 \ll 1$ ist.

R. Ladenburg[2]) wendet die Theorie von Lorentz auf den Fall zweier senkrecht zur Bewegungsrichtung befindlicher Wände an. Er erhält für den mittleren Widerstand über das mittlere Drittel zwischen den beiden Wänden die Formel $W = 6\pi\mu a v\left(1 + 3{,}3\frac{a}{h}\right)$, wobei h den Abstand der beiden parallelen Ebenen bedeutet. Weiter berechnete Ladenburg den Widerstand einer längs der Achse eines unendlich langen Zylinders sich bewegenden Kugel zu $W = 6\pi\mu a v\left(1 + 2{,}1\frac{a}{r}\right)$[1]), wobei r der Zylinderradius ist. Durch einfache Superposition der beiden Formeln erhält Ladenburg für den mittleren Widerstand einer längs der Achse eines endlichen Zylinders sich bewegenden Kugel (bei Messung über das mittlere Drittel)

$$W = 6\pi\mu a v\left(1 + 2{,}1\frac{a}{r}\right)\left(1 + 3{,}3\frac{a}{h}\right).$$

Eine Erweiterung der Theorie des Bodeneinflusses unter Zugrundelegung der hydrodynamischen Grundgleichungen in der von Oseen[2]) benutzten Form – analog der Erweiterung der Ladenburgschen Formel für den Wandeinfluß[3]) durch H. Faxén[4]) – existiert noch nicht. Ebenso ist der Fall, daß $\left(\frac{a}{z}\right)^2$ gegen 1 nicht mehr vernachlässigbar ist, theoretisch noch nicht behandelt worden.

R. Ladenburg[5]) überprüfte selbst die von ihm aufgestellten Formeln und stellte eine befriedigende Übereinstimmung mit den Versuchen fest. (Die Übereinstimmung wird durch Korrektur des Faktors 2,4 auf 2,1[1]) verschlechtert. Bezüglich seiner Untersuchungen über den Bodeneinfluß ist jedoch zu bemerken, daß der Einfluß des Bodens auf die Fallbewegung maximal 3 Prozent betrug. Mit Rücksicht auf die Ungenauigkeit bei Ladenburgs Versuchen ist aus ihnen eine Bestätigung seiner Formel für den Boden- und Deckeneinfluß, die eine indirekte Bestätigung der Theorie von Lorentz bedeuten würde, nicht abzuleiten.

Weiter untersuchte J. Schmiedel[6]) im Laufe seiner Arbeit über die Fallbewegung von Kugeln und Scheiben den Bodeneinfluß. Schmiedels Messungen liefern außer einer ersten

1) H. A. Lorentz, Abhandlungen über theoretische Physik **1**, 23ff., 1907.
2) R. Ladenburg, Ann. d. Phys. **23**, 447, 1907.
3) J. Stock, Crak. Anz. 1911, S. 18.
4) H. Faxén, Diss., Upsala 1921. – Ark. f. math. astr. och fysik **17**, 27, 1922/23.
5) Wie man sich leicht überlegen kann, ist dies ebenso wie die Vernachlässigung der quadratischen Trägheitsglieder für kleine Reynoldssche Zahlen zulässig.
6) G. Stokes, Cambr. Trans. **9**, 8, 1851.

1) Der Faktor 2,4 in der ursprünglichen Formel von Ladenburg wurde von H. Faxén[4]) auf 2,1 richtiggestellt.
2) C. W. Oseen, Ark. f. math. astr. och fysik **9**, 16, 1913/14.
3) Hier und im folgenden wird unter „Wandeinfluß", zum Unterschied von „Bodeneinfluß", der Einfluß der zur Bewegungsrichtung parallelen Wände verstanden.
4) H. Faxén, a. a. O.
5) R. Ladenburg, a. a. O.
6) J. Schmiedel, Physik. Zeitschr. **29**, 593, 1928.

qualitativen Feststellung des Bodeneinflusses noch eine grobe Bestätigung der Theorie von Lorentz. Genaueres kann aus diesen Untersuchungen nicht entnommen werden, da Schmiedel nur an drei Kugeln den Bodeneinfluß untersuchte, von denen er nur eine einzige auswertete. Abgesehen von den großen Schwankungen der Meßergebnisse an dieser einen Kugel betrug die Reynoldssche Zahl bei dieser Messung 0,251, sodaß die Anwendbarkeit der Theorie von Lorentz in Frage gestellt ist[1]). Dieser Versuch kann also noch nicht als sichere Bestätigung der Theorie von Lorentz aufgefaßt werden.

Schmiedel versuchte auch bei den Messungen in der Mitte des Fallgefäßes einen Aufschluß über die Gültigkeit der Ladenburgschen Formel für den Boden- und Deckeneinfluß zu gewinnen. Doch beträgt hier die theoretische Beeinflussung nie wesentlich mehr als 1 Proz., daher können auch diese Untersuchungen nicht als Bestätigung der Theorie gewertet werden.

Da, wie aus dem oben Gesagten hervorgeht, eine sichere experimentelle Untersuchung des Bodeneinflusses nicht vorliegt, war es wünschenswert, diesbezüglich umfangreichere Untersuchungen vorzunehmen. Es war vor allem wichtig festzustellen, ob und wieweit die Lorentzsche Theorie mit den Experimenten übereinstimmt und, falls sich bei größerem $\frac{a}{z}$, wie zu erwarten, eine Abweichung von dieser Theorie ergeben sollte, eventuell eine experimentelle Erweiterung der Formel von Lorentz zu liefern.

II. Versuchsanordnung und Meßmethode.

Die Versuchsanordnung.

Die wesentlichen Bestandteile der Apparatur, mit der vorliegende Versuche durchgeführt wurden, waren folgende: Das Fallgefäß mit dem Beobachtungsmikroskop, ein Thermostat, das Mikroskop zum Ausmessen der Teilchen, der Mikromanipulator und eine elektromagnetisch auslösbare Stoppuhr.

Das Fallgefäß (Fig. 1) besteht aus zwei koaxialen Hohlzylindern aus Messing. Der innere ist 7,5 cm hoch und hat einen Innendurchmesser von 2 cm. Zur Beobachtung bzw. Beleuchtung der Teilchen sind an drei Seiten Fenster angebracht, die mit Schellack auf das Innengefäß aufgeklebt sind. Den Boden bildet ein 2,1 cm hoher, an der Oberseite glattpolierter Vollzylinder aus Messing, der genau in das Innengefäß paßt und herausgenommen werden kann. Den oberen Abschlußteil bildet ein einsetzbarer Deckel mit einem 0,5 mm großen Loch in der Mitte und einem darüber aufgesetzten Trichter. Am Rand des Deckels ist ein 0,5 mm starker, drehbar angebrachter Messingdraht durchgeführt, an dessen unteres Ende ein 0,16 mm starker, abgebogener Stahldraht angelötet ist. Diese Vorrichtung dient

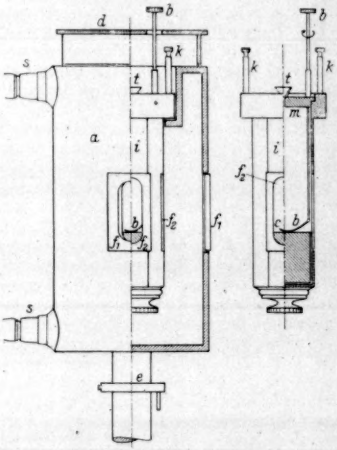

Fig. 1. Fallgefäß.
a Außengefäß. *i* Innengefäß. *c* Boden. *d* Deckel. *e* Fortsatz zur Befestigung. *s* Zu- und Abflußrohrstutzen. f_1 Außenfenster. f_2 Innenfenster. *t* Trichter. *b* Wegkehrvorrichtung. *m* einsetzbarer Deckel. *k* Stäbchen zum Herausziehen des Innengefäßes.

dazu, bereits gemessene Teilchen von der Mitte des Bodens an den Rand zu befördern, wo sie die Bewegung der nachfolgenden Teilchen nicht mehr beeinflussen können. Sämtliche Teile des Innengefäßes waren, um eine Reaktion des Öls mit dem Messing zu verhindern, stark vergoldet worden. Das Innengefäß ist aus Gründen der Temperaturkonstanz 2 cm tief in das Außengefäß versenkt und sitzt auf einem an der Innenseite des Außengefäßes angebrachten Ring auf. Es wurde in das Außengefäß mit Wachs eingekittet. Die Einpassungen des Innen- in das Außengefäß bzw. des Bodens in das Innengefäß ermöglichen eine genaue Horizontalstellung des Bodens und axiales Fallen der Teilchen.

Das Außengefäß hat eine Höhe von 11 cm und einen Außendurchmesser von 6 cm. Es hat ebenfalls an drei Seiten Fenster, während sich an der vierten Seite die Rohrstutzen für die Zuleitungen zum Thermostaten befinden. Das Außengefäß ist an der Grund- und Mantelfläche

[1]) H. A. Lorentz, a. a. O. S. 41.

zum Schutz gegen Wärmeleitung mit Asbestpapier überzogen und wurde während der Versuche dauernd durch einen Deckel geschlossen gehalten. Der etwa 6 cm lange und 1,5 cm dicke zylindrische Fortsatz des Außengefäßes war in einem schweren Dreifuß eingespannt, an dem auch das waagrecht liegende Beobachtungsmikroskop befestigt war.

Die Temperatur wurde durch einen etwa 15 Liter Wasser fassenden Thermostaten (mit Rührwerk) dauernd auf $15{,}40° \pm 0{,}005°$ C konstant gehalten. Als Fallflüssigkeit diente Rizinusöl.

Die Kugeln waren durch Zerstäubung von flüssigem Woodschen Metall in heißem Glyzerin hergestellt worden. Es wurden drei Serien von je ungefähr gleich großen Teilchen gemessen. Der Radius der Teilchen der Serie I betrug durchschnittlich 22,4 μ, der der Serien II und III 34,7 bzw. 15,6 μ. Sie wurden mikroskopisch mit einem Reichertschen Kompensationsokular Nr. 8 (13×) in Verbindung mit dem Reichertschen Schraubenmikrometer ausgemessen. Als Objektive dienten für Serie I ein Reichertobjektiv 3 (10×, num. Ap. 0,3; Brennweite 16,2 mm), für Serie II ein Zeißobjektiv A (8×, num. Ap. 0,20; Brennweite 18 mm) und für Serie III ein Reichertapochromat (20×, num. Ap. 0,60; Brennweite 8 mm). Die Beleuchtung erfolgte mit Hilfe eines Zeiß-Kondensors (num. Ap. 1,4) ohne Frontlinse. Als Lichtquelle diente eine Reichertsche Mikroskopierlampe.

Vom Mikroskoptisch ins Fallgefäß wurden die Kügelchen mit Hilfe eines Reichertschen Mikromanipulators gebracht. Dieser Apparat, im wesentlichen aus einer nach drei zueinander senkrechten Richtungen verschiebbaren feinen Nadel bestehend, ermöglicht es, das ausgemessene Teilchen aus der Nachbarschaft vieler anderer mit der mit Öl benetzten Nadel aufzuheben und ins Fallgefäß zu bringen.

Die mikroskopische Beobachtung der Teilchen erfolgte mit einem Zeißobjektiv V (Brennweite 50 mm) bzw. einem Zeißobjektiv a_3 (5×, Brennweite 25 mm) in Verbindung mit dem schon oben erwähnten Schraubenmikrometerokular. Da bei direkter seitlicher Beleuchtung Strömungen im Öl beobachtet worden waren, wurde indirekt beleuchtet. Die Teilchen wurden in dem von einem weißen Schirm reflektierten Licht beobachtet. (Der Schirm stand etwa 10 cm hinter dem Fallgefäß.)

Neben dem Beobachtungsmikroskop befanden sich zwei Taster, die über ein elektrisches Relais je nach Belieben den Haupt- oder Schleppzeiger einer Stoppuhr betätigten. Die Stoppuhr hatte eine Laufzeit von etwa 30 Minuten, die Ablesung war auf 0,01 Sekunden genau möglich.

Die Bestimmung der Konstanten.

Zur Eichung des Okularmikrometers wurde ein Zeißsches Objektmikrometer verwendet. Für 100 partes (1 Trommelumdrehung) des Okularmikrometers ergaben sich bei Verwendung des Objektivs: Zeiß A $51{,}84 \cdot 10^{-4}$ cm; Reichert 3 $41{,}98 \cdot 10^{-4}$ cm; Reichert Apochromat 8 mm $26{,}17 \cdot 10^{-4}$ cm.

Die Länge der Fallstrecke wurde durch Einhängen eines Objektmikrometers in das ölgefüllte Fallgefäß bestimmt. 100 partes des Okularmikrometers ergaben bei Kombination mit den Objektiven Zeiß V $207{,}5 \cdot 10^{-4}$ cm und Zeiß a_3 $92{,}15 \cdot 10^{-4}$ cm. Zur Kontrolle wurden diese Längen ohne Öl wie oben bestimmt. Die Differenz lag bei 1—2 Promille. Das für die Auswertung mit großer Genauigkeit benötigte Verhältnis der beiden Vergrößerungen des Beobachtungsmikroskops (bei Benutzung der Objektive Zeiß V bzw. Zeiß a_3) wurde noch durch das Verhältnis von Teilchenfallzeiten ohne Boden ermittelt. Es ergab sich über 9 Teilchen zu 0,4438, während das Verhältnis der mit Hilfe des Objektmikrometers gemessenen Vergrößerungen 0,4441 beträgt.

Bei Bestimmung der Geschwindigkeit v^* (siehe unten), die in großer Bodenentfernung vorgenommen werden muß, wurde das Objektiv (Zeiß V) um etwa 5 mm aus der Mikroskopachse mittels eines Objektivschlittens herausgehoben. Um eine etwa dadurch entstandene Verzerrung festzustellen, wurden Geschwindigkeitsmessungen ohne Boden vorgenommen. Die bei herausgehobenem Objektiv gemessene Geschwindigkeit unterschied sich im Mittel über 8 Teilchen von der bei normaler Objektivstellung gemessenen um 0,7 Promille. Ein etwa dadurch entstehender Fehler kann also vernachlässigt werden.

Die Dichte ϱ_2 des Rizinusöls wurde mit Hilfe eines Pyknometers bestimmt. Aus je zwei Messungen ergaben sich die Werte: bei 15,40° C 0,9656; bei 21,00° 0,9627; bei 25,00° 0,9610.

Ebenso wurde die Dichte ϱ_1 des Woodschen Metalls bestimmt. Im Mittel über vier Messungen wurde der Wert 9,590 erhalten.

Die Zähigkeit μ des Öls wurde für 21,00° und 25,00° C von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt in Berlin zu 936 bzw. 680 $cp \pm 0{,}5$ Proz. bestimmt. Eine Relativmessung mittels eines Ostwaldschen Kapillarviskosimeters ergab für die Zähigkeit bei 15,40° den Wert 1526 cp.

Der Meßvorgang.

Die Messungen wurden folgendermaßen durchgeführt: Der Durchmesser des Teilchens wurde aus fünf in verschiedenen Richtungen ausgeführten mikroskopischen Durchmesserbestim-

mungen erhalten[1]). Das ausgemessene Teilchen wurde mit Hilfe des Mikromanipulators in das Fallgefäß gebracht. Es löste sich von der Nadel beim Eintauchen in den ölgefüllten Trichter ab. Die Fallzeiten, die die Teilchen benötigten, um die Strecke bis zum Gesichtsfeld des Mikroskops zurückzulegen, lag je nach der Größe der Teilchen zwischen 45 Minuten und 6 Stunden. Etwa 1–1½ Stunden nach dem ersten Teilchen wurde ein zweites fallen gelassen usf. Sobald ein Teilchen sich etwa 5 mm über dem Boden befand, wurden mit herausgehobenem Objektiv (Zeiß V) sechs Fallzeiten über gleiche Intervalle gemessen. Aus der mittleren Geschwindigkeit v^* über diese Intervalle wurde die in den Rechnungen verwendete Geschwindigkeit v_0 (siehe unten) erhalten.

Zur Untersuchung des Bodeneinflusses wurde bei den Serien I und III das Objektiv a_3, bei Serie II das Objektiv V verwendet. Bei normaler Objektivstellung wurde die Bewegung des Teilchens bis zum Auftreffen auf den Boden verfolgt. Es wurden die Fallzeiten über zwölf Intervalle des Okularschraubenmikrometers gemessen. Dieses ersetzte so ein festes Raster mit dem Vorteil, daß man auch beliebig große und kleine Intervalle einstellen konnte. Das letztere erwies sich besonders in großer Bodennähe von großem Wert. Die Stoppungen erfolgten bei Berührung des unteren Teilchenrandes mit dem Querfaden des Mikrometers. Die Gesamtzeit über alle zwölf Intervalle war an der Stoppuhr selbst, die Zeit bis zur vorletzten Marke an einer Kontrolluhr ablesbar[2]). Nach der letzten Stoppung wurde der Abstand der Marken vom Boden mit Hilfe des Mikrometers bestimmt[3]) und das Teilchen aus der Mitte des Bodens weggekehrt. Nach etwa 45–60 Minuten erfolgte die nächste Messung[4]).

1) Es wurden nur solche Teilchen verwendet, bei denen sich die verschiedenen Durchmesser um weniger als 1 Proz. unterschieden.

2) Die Ablesungen an der Stoppuhr wurden von den Herren R. Wimmer und H. Rossi besorgt, wofür ihnen auch an dieser Stelle bestens gedankt sei.

3) Die Entfernung des Teilchenmittelpunktes beim Durchgang durch jede einzelne Marke konnte aus der Entfernung dieser Marke vom Boden und dem mikroskopisch gemessenen Teilchenradius bestimmt werden.

4) Die Abstände der Teilchen waren so groß, daß eine gegenseitige Beeinflussung nicht stattfinden konnte. Nach Smoluchowski (Anz. Ak. Krakau 1911, S. 28) sind die Widerstände zweier einander beeinflussender Teilchen, die sich parallel und mit gleicher Geschwindigkeit v bewegen:

$$W_1 = 6\pi\mu a_1 v\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a_2}{r_{12}}\right); \quad W_2 = 6\pi\mu a_2 v\left(1 - \frac{3}{4}\frac{a_1}{r_{12}}\right),$$

wobei r_{12} der Abstand der beiden Kugelmittelpunkte ist. Es ergeben sich, damit die Beeinflussung unter 0,1 Proz. liegt, als notwendige Abstände:

Serie I 1,5 cm; Serie II 2,5 cm und Serie III 1,0 cm. Diese Abstände wurden bei allen ausgewerteten Teilchen nicht unterschritten.

1) J. Schmiedel, a. a. O. S. 602.

III. Die Auswertung der Messungen.

Dimensionslose Darstellung des Widerstandsverlaufs.

Beim Auftragen der Geschwindigkeit v der Teilchen als Funktion des Bodenabstandes z, wie es Schmiedel[1]) durchführte, treten folgende Schwierigkeiten auf: Eine exakte Bestimmung der Momentangeschwindigkeit ist nicht möglich, da die Bewegung ungleichförmig ist. Weiter ist es unmöglich, bei kleinen Kugeln immer genau gleich große für die Messungen zu benutzen. Es war daher notwendig, eine Darstellung des Bodeneinflusses zu finden, in der die verschieden großen Kugeln ein gleichartiges Resultat liefern.

Aus allgemeinen Überlegungen kann man – zum Teil in Analogie mit der nahe verwandten Theorie des Wandeinflusses – für kleine Reynoldssche Zahlen annehmen, daß der Widerstand einer Kugel in einem unendlich weiten Gefäß unter dem Einfluß des Bodens gleich ist dem Widerstand in der allseits unendlich ausgedehnten Flüssigkeit mal einem Faktor, der nur eine Funktion des Verhältnisses von Kugelradius a zu Bodenabstand z ist. Es sei vorweggenommen, daß die größte bei den vorliegenden Untersuchungen auftretende Reynoldssche Zahl $\left(R = \frac{2a\varrho_2 v}{\mu}\right) 7 \cdot 10^{-7}$ beträgt, so daß die Voraussetzung $R \ll 1$ vollkommen erfüllt ist. Zur Abkürzung ist im folgenden $\frac{z}{a} = \zeta$ gesetzt. Somit ergibt sich für die Fallgeschwindigkeit unter dem Einfluß einer zur Bewegungsrichtung senkrechten, unendlich ausgedehnten ebenen Wand $v = \frac{v_{st}}{f(\zeta)}$, wobei v_{st} die (aus dem Stokesschen Gesetz folgende) Geschwindigkeit im unendlich ausgedehnten Medium ist. $f(\zeta)$ wird in der Folge kurz „verzögernde Funktion" genannt werden.

Die Fallzeit t über ein bestimmtes Intervall von z_1 bis z_2 ist durch $t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{dz}{v}$ gegeben. Wenn wir v von oben einsetzen, erhalten wir $t = \int_{z_1}^{z_2} \frac{f(\zeta)\,dz}{v_{st}}$.

Führt man nun die neue Variable $\zeta = \frac{z}{a}$ ein, so bekommen wir, da v_{st} und a konstant sind, $t = \frac{a}{v_{st}} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta)\,d\zeta$ oder $\frac{t v_{st}}{a} = \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(\zeta)\,d\zeta$, das Integral

über die verzögernde Funktion. Wählt man nun für alle Teilchen die gleiche obere Grenze ζ_0 und läßt die untere Grenze variieren, so bekommt man eine Funktion von ζ, die für alle Teilchen verschiedener Größe gleich sein muß und aus der durch Differentiation die gesuchte Funktion $f(\zeta)$ erhalten werden kann. Dies gilt natürlich nur dann, wenn, wie wir angenommen haben, die verzögernde Funktion nur von ζ abhängt. Diese Annahme erwies sich auch als richtig, wie die Ergebnisse der Untersuchungen zeigen werden. Damit ist gleichzeitig eine dimensionslose Darstellung des Problems gegeben.

Eine Messung des Bodeneinflusses ohne „Wandeinfluß" ist nun praktisch nicht möglich, da die Messungen in einem endlichen Gefäß vorgenommen werden müssen, so daß der Widerstand auch durch die Gefäßwände vergrößert wird. Wenn nun der Wandeinfluß sehr gering ist, kann man annehmen, daß er sich dem Bodeneinfluß einfach superponiert, daß also bei Benutzung eines zylindrischen Gefäßes (für die Rechnung am einfachsten) und bei axialem Fallen der Teilchen die Vergrößerung des Widerstandes durch die Röhrenwand längs des ganzen Zylinders konstant ist. Wenn wir unter v_0 die Geschwindigkeit in der Achse des endlichen Zylinders in unendlicher Bodenentfernung verstehen, so ist die Geschwindigkeit an irgendeiner Stelle der Achse

$$v = \frac{v_0}{f(\zeta)} \qquad \text{bzw. dann} \qquad \int_{\zeta}^{\zeta_0} f(\zeta)\, d\zeta = \frac{t v_0}{a}.$$

v_0 kann nun rein theoretisch mit Hilfe der Formel von Faxén bestimmt werden. Es ist nämlich mit einer für die vorliegenden Versuchsbedingungen vollkommen ausreichenden Näherung $v_0 = \dfrac{2(\varrho_1 - \varrho_2)\cdot g a^2}{9\mu\left(1 + 2{,}104\,\dfrac{a}{r}\right)}$, wobei ϱ_1 und ϱ_2 die Dichten des Kugelmaterials bzw. der Fallflüssigkeit, g die Schwerebeschleunigung, a den Teilchenradius, r den Zylinderradius und μ die Zähigkeit der Flüssigkeit bedeuten. Vorteilhafter ist es jedoch, v_0 durch Messung der Geschwindigkeit in großer Bodenentfernung zu ermitteln, da dann eine Reihe von Fehlern, die bei Zähigkeitsmessung, bei Dichtebestimmungen und auch bei Ausmessung der Teilchengröße entstehen, nicht mehr in die Resultate eingehen.

IV. Die Ergebnisse der Messungen.

Die Bestimmung von v_0.

Da es nicht möglich ist, die Geschwindigkeit in unendlicher Bodenentfernung zu messen, war es notwendig, an die in großer Bodenentfernung gemessene Geschwindigkeit v^*[1]) eine Korrektur anzubringen. Man kann nun hierzu ohne weiteres annehmen, daß der Bodeneinfluß in großer Bodenentfernung z eine lineare Funktion von $\frac{a}{z}$ ist; d. h. die Geschwindigkeit in großer Bodenentfernung ist gegeben durch $v = \dfrac{v_0}{1 + k_1 \cdot \dfrac{a}{z}}$.

Die Konstante k_1, die dem Faktor $\frac{9}{8}$ der Lorentzschen Theorie entspricht, läßt sich aus den Messungen in folgender Weise ermitteln[2]): Man kann die in großer Bodenentfernung gemessenen Fallzeiten (von z_1 bis z_2) mit den in größerer Bodennähe gemessenen (von z_3 bis z_4) vergleichen. (Auch bei den Messungen in größerer Bodennähe ist der Einfluß eines etwaigen in $\frac{a}{z}$ quadratischen Gliedes noch klein.) Es ist nun

$$t = \frac{1}{v_0}\int_{z_1}^{z_2}\left(1 + k_1 \frac{a}{z}\right) dz\,,$$

also $t_1 = \dfrac{1}{v_0}\left\{(z_1 - z_2) + k_1 a\,(\ln z_1 - \ln z_2)\right\}$ und $t_{II} = \dfrac{1}{v_0}\left\{(z_3 - z_4) + k_1 a\,(\ln z_3 - \ln z_4)\right\}$, wenn z_1, z_2, z_3, z_4 die Abstände der Stoppmarken vom Boden und t_I, t_{II} die Fallzeiten des Teilchens von z_1 bis z_2 bzw. von z_3 bis z_4 bedeuten. Für k_1 ergibt sich

$$k_1 = \frac{t_{II}(z_1 - z_2) - t_I(z_3 - z_4)}{a\left\{t_I(\ln z_3 - \ln z_4) - t_{II}(\ln z_1 - \ln z_2)\right\}}.$$

Im Mittel über alle gemessenen Teilchen ergab sich für k_1 der Wert $k_1 = 1{,}267$ (Serie I: 1,234; Serie II: 1,278; Serie III: 1,319). Der mittlere Streuungsfehler des Gesamtmittels beträgt 0,035. Der Unterschied gegen den Faktor der Lorentzschen Formel $\frac{9}{8} = 1{,}125$ beträgt 13 Proz. Man erkennt aber leicht, daß ein systematischer Fehler in der Geschwindigkeit von 1 Promille (etwa hervorgerufen durch einen geringfügigen Fehler in der Vergrößerung des Beobachtungsmikroskops) schon den Unterschied zwischen dem oben bestimmten k_1 und dem Faktor $\frac{9}{8}$ der Lorentzschen Theorie erklärt. Es erscheint daher gerechtfertigt, die in großer Bodenentfernung gemessene Geschwindigkeit v^* statt

1) v^* ist die mittlere Geschwindigkeit über das Intervall z_1, z_2 und wurde als Momentangeschwindigkeit der Kugel im Mittelpunkt des Intervalls z_1, z_2 aufgefaßt. Der Fehler, der mit Rücksicht auf die verzögerte Bewegung durch dieses Verlegen in den Mittelpunkt entsteht, kann, wie man leicht sieht, vollkommen vernachlässigt werden.

2) Diese Bestimmung ist wegen des großen Einflusses geringer systematischer Fehler nur als vorläufig anzusehen.

mit dem experimentell ermittelten Faktor 1,267 mit dem Lorentzschen Faktor $\frac{9}{8}$ zu korrigieren und diese korrigierte Geschwindigkeit in der Auswertung als v_0 zu verwenden. Eine Korrektion mit dem Faktor 1,267 würde übrigens im Endresultat nur eine ganz geringfügige Änderung hervorrufen (siehe unten).

Für die drei Serien waren die an v^* angebrachten Korrekturen verschieden (je nach Teilchengröße und Bodenabstand der Messung von v^*), und zwar im Durchschnitt für Serie I: 0,4 Proz., für Serie II: 0,8 Proz. und für Serie III: 0,6 Proz. Die maximal angebrachte Korrektur beträgt 0,86 Proz.[1]).

Die Werte von v_0 kann man mit den von der Theorie geforderten Geschwindigkeiten ohne Bodeneinfluß vergleichen. Zu diesem Zweck wurde v_0 mit Hilfe der Formel von Faxén[2])

$$\left(v_0 = \frac{v_{st}}{1 + 2{,}104\frac{a}{r} + \cdots}\right)$$

auf unendliches Medium umgerechnet und aus diesen so ermittelten Geschwindigkeiten die Zähigkeit berechnet. Sie ergab sich im Mittel über alle Teilchen zu 1521 cp, während die Bestimmung mit dem Viskosimeter 1526 cp ergeben hatte (siehe oben). Der Unterschied liegt innerhalb der Fehler der Zähigkeitsmessung. Dieser Vergleich stellt somit eine erneute experimentelle Bestätigung des Stokesschen Gesetzes dar.

Als ζ_0 wurde 45 gewählt. Da es nicht einfach möglich war, schon vor der Messung den Strich des Okularmikrometers genau auf den $\zeta_0 = 45$ entsprechenden Bodenabstand zu bringen, wurde schon ein bis zwei Intervalle vor diesem Punkt zu messen begonnen und die Fallzeit vom Punkt $z = 45\,a$ bis zur nächsten Marke durch lineare Interpolation gewonnen, was in diesem Gebiet, in dem der Bodeneinfluß noch gering ist, ohne weiteres zulässig ist.

Die verzögernde Funktion.

Durch die Werte $\frac{tv_0}{a}$ ist das Integral über die verzögernde Funktion gegeben. Um die graphische Darstellung in ein geeignetes Koordinatensystem einzubauen, wurde in $\frac{tv_0}{a} = \int_{\zeta}^{\zeta_0} f(\zeta)\,d\zeta$ links und rechts ζ addiert. Die Werte $\frac{tv_0}{a} + \zeta$ sind in Abhängigkeit von ζ für die einzelnen Serien in den Figuren 2, 3 und 4 eingetragen. Gleichzeitig ist in diese Figuren die aus dem Lorentzschen Gesetz sich ergebende Kurve eingezeichnet.

Es ist ersichtlich, daß bei großem Bodenabstand die experimentelle Kurve mit der aus der Lorentzschen Formel gewonnenen bei allen drei Serien gut übereinstimmt, während bei kleinem Bodenabstand ein systematischer Unterschied festzustellen ist. Diese Abweichung ist schon aus den direkt gemessenen Fallzeiten zu

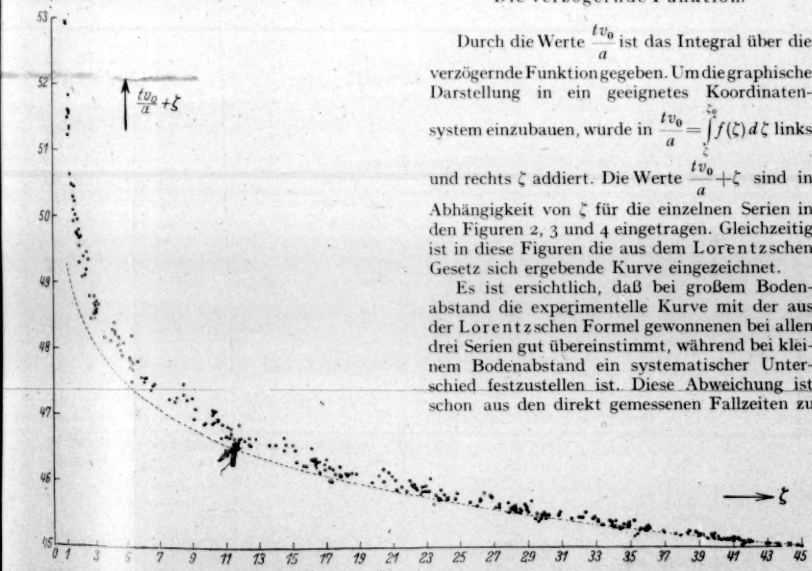

Fig. 2. Experimentelle Kurve für den Bodeneinfluß. Serie I ($a = 22{,}4 \cdot 10^{-4}$ cm).
○ Einzelne Meßpunkte. × Zusammenfallende Meßpunkte. —— Lorentzsche Theorie.

1) Ein eventueller Einfluß der Wegkehrvorrichtung ist bei Messung des v^* und des Bodeneinflusses gleich und kann daher in das v_0 einbezogen werden. Das gleiche trifft für den Deckeneinfluß zu. Er ändert sich nämlich innerhalb der ganzen Meßstrecke (bei herausgehobenem und bei in normaler Stellung befindlichem Objektiv) nur um 0,2 Promille, kann also als konstant angesehen werden. (Der Gesamteinfluß der Decke beträgt nach Lorentz maximal 1,1 Promille.)

2) Wegen der Kleinheit des Einflusses wurde bloß das lineare Glied in $\frac{a}{r}$ berücksichtigt.

ersehen. In der folgenden Tabelle sind als Beispiele gemessene Fallzeiten mit den nach der Formel von Lorentz berechneten verglichen.

Es sind noch die Fallzeiten, die der Bewegung ohne Bodeneinfluß entsprechen würden (aus v_0 berechnet), hinzugefügt. Für Teilchen Nr. 10 ($a = 21{,}89\,\mu$) sind die Fallzeiten von $z = 66{,}12\,\mu$ bis $z = 29{,}26\,\mu$, für Teilchen Nr. 18 ($a = 21{,}93\,\mu$) die Zeiten von $z = 60{,}63\,\mu$ bis $z = 23{,}31\,\mu$ und für Teilchen Nr. 82 ($a = 15{,}43\,\mu$) von $z = 42{,}16\,\mu$ bis $z = 15{,}43\,\mu$ angegeben.

Fallzeiten in Sekunden.

Teilchennummer	10	18	82
Gemessen	14,00	18,18	27,58
Nach Lorentz....	9,63	10,34	14,62
Ohne Bodeneinfluß	6,24	6,28	9,51

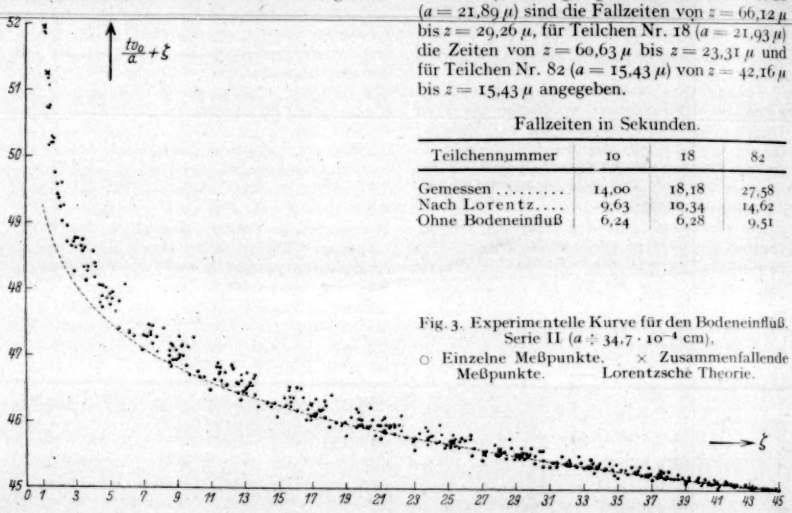

Fig. 3. Experimentelle Kurve für den Bodeneinfluß. Serie II ($a \doteq 34{,}7 \cdot 10^{-4}$ cm).
○ Einzelne Meßpunkte. × Zusammenfallende Meßpunkte. Lorentzsche Theorie.

Die drei experimentellen Kurven zeigen, wie zu erwarten war, so gut wie vollständige Übereinstimmung. Es konnten daher alle Meßpunkte in einer Kurve vereinigt und gemeinsam ausgewertet werden. Um zur verzögernden Funktion selbst zu gelangen, muß man

$$\frac{tv_0}{a} + \zeta = \int_{\zeta}^{\zeta_0} f(\zeta)\,d\zeta + \zeta$$

differenzieren und erhält dadurch

$$f(\zeta) = 1 - \frac{d}{d\zeta}\left(\frac{tv_0}{a} + \zeta\right).$$

Da nun infolge der unvermeidlich auftretenden Streuung das Durchlegen einer eindeutigen

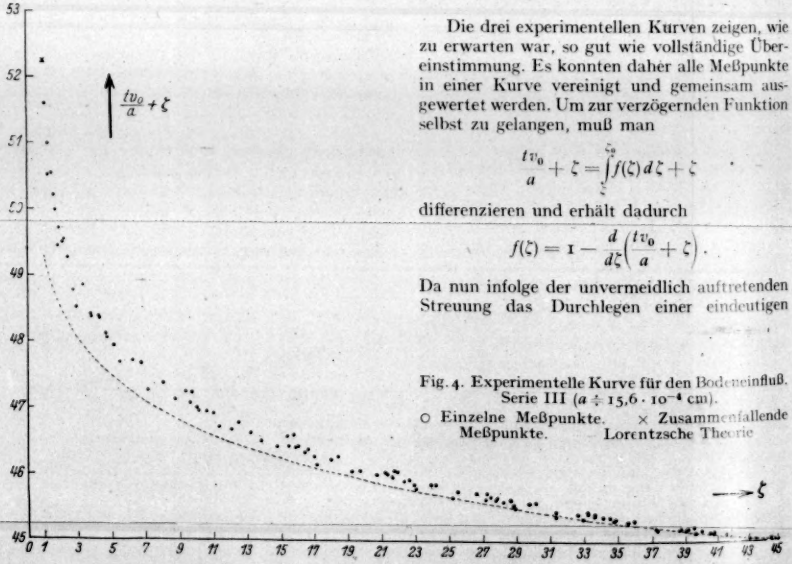

Fig. 4. Experimentelle Kurve für den Bodeneinfluß. Serie III ($a \doteq 15{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm).
○ Einzelne Meßpunkte. × Zusammenfallende Meßpunkte. Lorentzsche Theorie

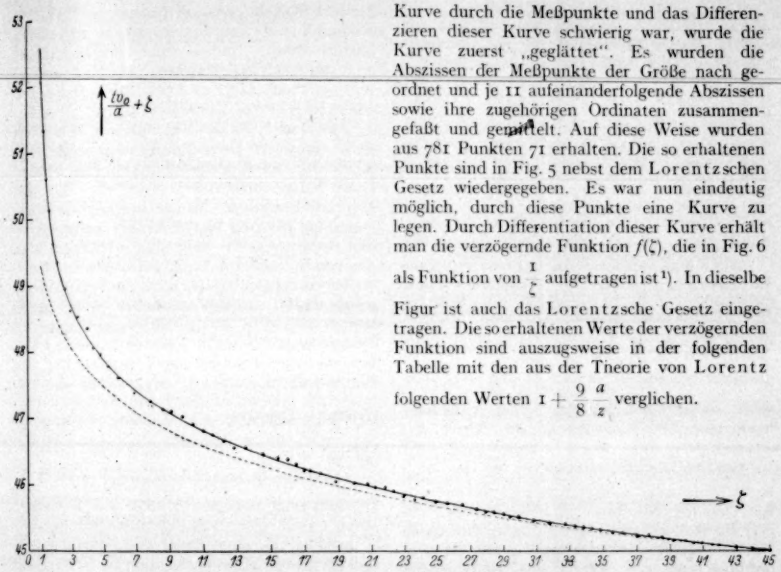

Fig. 5. Experimentelle Kurve für den Bodeneinfluß.
○ Durch „Glättung" entstandene Punkte. —— Interpolierte Kurve. Lorentzsche Theorie.

Kurve durch die Meßpunkte und das Differenzieren dieser Kurve schwierig war, wurde die Kurve zuerst „geglättet". Es wurden die Abszissen der Meßpunkte der Größe nach geordnet und je 11 aufeinanderfolgende Abszissen sowie ihre zugehörigen Ordinaten zusammengefaßt und gemittelt. Auf diese Weise wurden aus 781 Punkten 71 erhalten. Die so erhaltenen Punkte sind in Fig. 5 nebst dem Lorentzschen Gesetz wiedergegeben. Es war nun eindeutig möglich, durch diese Punkte eine Kurve zu legen. Durch Differentiation dieser Kurve erhält man die verzögernde Funktion $f(\zeta)$, die in Fig. 6 als Funktion von $\frac{1}{\zeta}$ aufgetragen ist[1]). In dieselbe Figur ist auch das Lorentzsche Gesetz eingetragen. Die so erhaltenen Werte der verzögernden Funktion sind auszugsweise in der folgenden Tabelle mit den aus der Theorie von Lorentz folgenden Werten $1+\frac{9}{8}\frac{a}{z}$ verglichen.

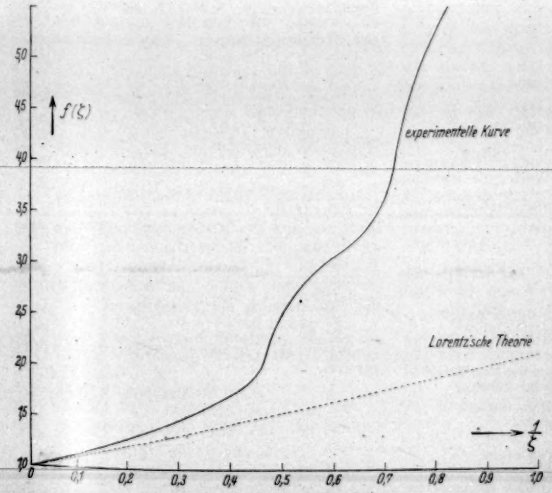

Fig. 6. Verzögernde Funktion.

1) Die Gestalt der Kurve $f(\zeta)$ in Fig. 6, für $\frac{1}{\zeta}>0{,}4$, ist nicht vollkommen gesichert, da eine bei der Differentiation entstehende geringe Ungenauigkeit großen Einfluß auf die Form der Kurve ausübt, jedoch ist die ungefähre Größe der Werte von $f(\zeta)$ durch die Kurve richtig wiedergegeben.

Werte der verzögernden Funktion.

$\frac{a}{z}$	Lorentz	Experiment	$\frac{a}{z}$	Lorentz	Experiment
0,03	1,034	1,038	0,40	1,450	1,725
0,04	1,045	1,051	0,45	1,506	1,930
0,05	1,056	1,063	0,50	1,563	2,55
0,10	1,113	1,128	0,55	1,619	2,89
0,15	1,169	1,210	0,60	1,675	3,08
0,20	1,225	1,285	0,65	1,731	3,27
0,25	1,281	1,385	0,70	1,788	3,69
0,30	1,338	1,490	0,75	1,844	4,73
0,35	1,394	1,600	0,80	1,900	5,34

Wenn man versuchsweise in Erweiterung des Lorentzschen Gesetzes die verzögernde Funktion als Polynom in der Variablen $\frac{1}{\zeta}$ ansetzt, was bis in nicht allzu große Bodennähe vermutlich gestattet ist, also $f(\zeta) = 1 + \frac{k_1}{\zeta} + \frac{k_2}{\zeta^2} + \frac{k_3}{\zeta^3} + \cdots$ setzt, so ist die Konstante k_1 der Richtungskoeffizient der Tangente an die Kurve $f(\zeta)$ bei $\frac{1}{\zeta} = 0$; k_1 ergibt sich zu 1,145[1]). Für k_2 ergibt sich durch Probieren als beste Annäherung $k_2 \doteqdot 3{,}0$. Die Konstante k_3 muß, was sich aus der Darstellung der differenzierten Funktion ergibt, negativ sein und liegt in der Größenordnung von k_2[2]). Wären die Geschwindigkeiten v^* mit dem experimentell ermittelten Faktor 1,267 statt $\frac{9}{7}$ korrigiert worden (siehe oben), so würde die Kurve $f(\zeta)$ in Fig. 6 derart modifiziert, daß die aus ihr ermittelte Konstante $k_1 = 1{,}145$ um 0,03 größer würde.

V. Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde der Einfluß des Gefäßbodens auf die Fallbewegung kleiner Kugeln aus Woodschem Metall in Rizinusöl an 83 Teilchen untersucht. 14 Teilchen hatten einen Radius von durchschnittlich $15{,}6 \cdot 10^{-4}$ cm, 34 Teilchen von $22{,}4 \cdot 10^{-4}$ cm und 35 von $34{,}7 \cdot 10^{-4}$ cm. Die größte auftretende Reynoldsche Zahl betrug $7 \cdot 10^{-7}$.

Aus den Messungen konnte mit Hilfe einer dimensionslosen Darstellung eine experimentelle Kurve für den Bodeneinfluß gefunden werden. Diese Kurve stellt das Integral über die „verzögernde Funktion" dar und beschreibt die Fallbewegung bis zum Auftreffen des Teilchens auf den Boden. Aus ihr kann durch Differentiation die verzögernde Funktion gewonnen werden.

Es ergibt sich weiter, daß die Teilchen aller untersuchten Größen denselben Widerstandsverlauf zeigen, d. h. daß die Vergrößerung des Widerstandes durch den Boden nur eine Funktion des Verhältnisses von Teilchenradius a zu Bodenentfernung z ist. Setzt man die verzögernde Funktion als Potenzreihe in $\frac{a}{z}$ an, ergeben sich für die Faktoren der einzelnen Glieder $k_1 = 1{,}145$, $k_2 \doteqdot 3{,}0$ und für k_3 ein negativer Wert von der Größenordnung von k_2. Die Differenz zwischen k_1 und dem Lorentzschen Faktor $\frac{9}{7} = 1{,}125$ liegt innerhalb der Versuchsfehler. Es kann daher als bestätigt gelten, daß bei großer Bodenentfernung der Widerstand durch die Theorie von Lorentz richtig wiedergegeben wird. Für größere Bodennähe weicht die experimentelle Kurve von der Theorie stark ab (beispielsweise ist, wie sich aus Fig. 6 ergibt, der Widerstand bei $\frac{z}{a} = 1{,}25$ ungefähr 2,8mal so groß als der sich aus der Theorie von Lorentz ergebende Wert bzw. 5,3mal größer als der Widerstand ohne Bodeneinfluß).

Vorliegende Versuche wurden zum Teil mit Apparaten durchgeführt, die aus Herrn Prof. F. Ehrenhaft von der Rockefeller Foundation zur Verfügung gestellten Mitteln angeschafft wurden. Dafür sei sowohl Herrn Prof. Ehrenhaft als auch der Rockefeller Foundation herzlichst gedankt. Weiter danken wir Herrn Dr. P. Selner für seine liebenswürdige Unterstützung beim Aufbau der Apparatur und bei der Vorbereitung der Experimente.

Wien, III. Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 2. Juni 1937.)

1) Der so erhaltene endgültige k_1-Wert ist kleiner als der oben erhaltene Wert 1,267. Dies ist auf den großen Einfluß geringer systematischer Fehler bei der oben durchgeführten Bestimmung und zum großen Teil auf den dort vernachlässigten Einfluß des quadratischen Gliedes zurückzuführen.

2) Es wurde auch versucht, die verzögernde Funktion im Gebiet $\zeta = 5$ bis $\zeta = 45$ durch ein Polynom vierten Grades in $\frac{1}{\zeta}$ durch Ausgleichsrechnung zu approximieren, jedoch zeigt sich, daß die Ungenauigkeit der experimentellen Kurve zu groß ist, als daß man einwandfrei die Koeffizienten der höheren Potenzen bestimmen könnte.

Über einen registrierenden Lichtmengenmesser.

Von Walther Gerlach und Otto Buhl.

Es ist die Aufgabe gestellt, die gesamte Lichtmenge $i \cdot t$ während eines längeren Zeitraumes (Stunden, Tage, von Monat zu Monat) in Treibhäusern, auf Versuchsfeldern, unter Baumgruppen, in Krankensälen und auf Liegeterrassen, in Versuchsräumen zur Prüfung von Farbstoffen u. dgl. auf Lichtechtheit zu messen.

1. Grundsatz des Gerätes.

Man stellt an den Versuchsplatz ein Crookessches Radiometer (Lichtmühle), dessen Achse genügend weit oberhalb der Flügel ein kleines Spiegelchen trägt. Auf dieses Spiegelchen fällt das Licht einer Niedervoltglühlampe, so daß dieser Lichtzeiger bei der Drehung des Radiometersystems einen Kreis bestreicht. Bei einer bestimmten Stellung des Systems (und des Spiegelchens) läuft der Lichtstrahl über eine lichtelektrische Zelle, also bei jeder Umdrehung des Radiometersystems einmal, je nach der Umdrehungsgeschwindigkeit und dem Abstand Spiegel—Photozelle während längerer oder kürzerer Zeit. Der lichtelektrische Strom wird verstärkt und betätigt ein Zählwerk, so daß jede Umdrehung gezählt wird. Die Umdrehungsgeschwindigkeit eines gut gelagerten Radiometers ist der mittleren Intensität während dieser Zeit proportional. Die vom Zählwerk angezeigte Zahl der Umdrehungen während der ganzen Beobachtungszeit ist also ein relatives Maß für die gesamte Lichtmenge in dieser Zeit. Die Schwärzung der Flügel läßt Strahlen aller Wellenlängen gemäß ihrer Energie ohne wesentliche Selektivität wirken. Zur Vermeidung von lokalen Temperaturstörungen des Radiometergefäßes kann dieses mit einem Wassermantel umgeben werden.

2. Die Eigenschaften der Lichtmühle.

Die Grenzen, innerhalb deren Proportionalität zwischen Umdrehungsgeschwindigkeit (Reziprokes der Zeit t für eine Umdrehung U) und der Strahlung besteht, sind sehr weite. Es wurde die Strahlung einer Wolfram-Punktlichtlampe zwischen 25 und 200 cm Abstand (A) von einem Radiometer mit 4 Flügeln gemessen; die Zeiten pro U stiegen von 1,3 bis 80 sek. Für den Quotienten t/A^2 ergab sich:

A	200	175	150	100	75	62,5	50	25
t/A^2	190	180	173	176	186	178	186	(200)[1]

Mittel: 181 ± 5 Proz.

Die Fehlerbreite ist wesentlich auf die rohe Abstandsmessung und die Inkonstanz der Lampe zu schieben. Bei konstant gehaltener Lichtintensität ist die Umdrehungsgeschwindigkeit sehr konstant und lieferte nach Wochen (Messung am 2. 7. und 29. 7. 1937) auf 2 Proz. denselben Wert.

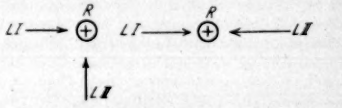

Fig. 1. R = Radiometer, L_I, L_{II} = zwei Lichtquellen aus verschiedenen Richtungen.

Ferner wurde geprüft, ob die Wirkung zweier Lampen, die unter verschiedenen Winkeln das Radiometer bestrahlen, sich addiert. Sie wurden in zwei Stellungen angeordnet. Es war streng:

$$\frac{1}{t_I} + \frac{1}{t_{II}} = \frac{1}{t_{I+II}} .$$

Das Radiometer mißt also die Summe aller Strahlungen aus allen Richtungen. Selbstverständlich wird die schräg von oben oder unten einfallende Strahlung nur entsprechend dem Kosinus ihres Einfallswinkels gemessen; aber bei relativen Messungen am gleichen Ort bringt dies keinen Fehler.

Bei Schwankungen der Lichtintensität hinkt die Umdrehungsgeschwindigkeit etwas nach, abhängig von der Masse des Systems bei der Beschleunigung und von der Reibung bei der Verlangsamung. Dieser grundsätzliche Fehler macht sich aber nur bei schnellen Wechseln bemerkbar, wie aus Fig. 2 folgt, in welcher der Anlauf und die Abbremsung bei Helligkeitsänderungen von etwa 1 : 2 für zwei Helligkeiten zeitlich darstellt. Über längere Zeiten mittelt er sich heraus.

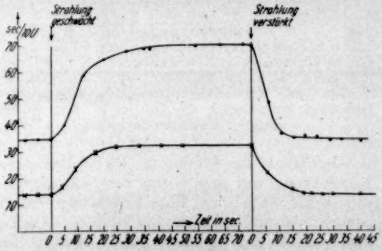

Fig. 2. Anlauf- und Abbremsungskurven bei Bestrahlungsänderung.

1) A^2-Gesetz nicht mehr erfüllt; Filterversuche bei konstantem Abstand A zeigten, daß die Proportionalität mit i noch bei 100 U pro Minute ($t = 0{,}6''$) vorhanden ist.

3. Die Registrierung der Umdrehungen der Lichtmühle.

Zur Zählung der Lichtimpulse, welche über den Radiometerspiegel auf die lichtelektrische Zelle fallen, sind vielerlei Anordnungen möglich. Nur muß die elektrische Übertragung gewisse Eigenschaften haben, welche die Aufgabe etwas schwieriger machen als etwa die Zählung der Impulse eines Spitzenzählers. Denn die lichtelektrische Erregung dauert je nach der Umdrehungsgeschwindigkeit sehr verschiedene Zeit. Da es einfacher ist, kurze Stromstöße zu registrieren, geht man mit der lichtelektrischen Zelle so weit wie möglich vom Radiometersystem fort, weil dann die Bahngeschwindigkeit des reflektierten Lichtstrahls groß ist. Ist die lichtempfindliche Fläche der Zelle etwa 2,5 cm breit, so läuft bei einer Umdrehung pro Minute der Lichtzeiger in 50 cm Abstand in $^1/_2$ Sekunde über die Zelle. Diese Geschwindigkeit wird noch dadurch vergrößert, daß man das vom Spiegelchen reflektierte Licht parallel macht und mit einer Zylinderlinse ein verkleinertes Bild der Wendel der Beleuchtungslampe auf einen Spalt gleicher Breite entwirft, der vor der lichtelektrischen Zelle steht. Auf diese Weise kann man auch bei großer Umlaufzeit einen sehr schnellen Lauf des Lichtzeigers über die Zelle erreichen. Wir beschreiben eine ausprobierte Schaltung mit Verwendung einer Glimmlampe (Glimmrelais[1]); Schaltungsskizze in Fig. 3).

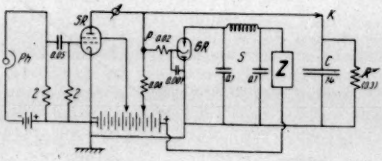

Fig. 3. *Ph* = lichtelektrische Zelle (Preßler); *SR* = Schirmgitterröhre (Telefunken RENS 1204); *GR* = Glimmrelais; Z = Zählwerk; K = ein vom Zählwerk bedienter Kontakt; *R* = ein variabler Widerstand. Die Zahlen bei den Kapazitäten bedeuten Mikrofarad, die Zahlen bei den Widerständen bedeuten Megohm.

Die Anode der Photozelle *Ph* ist über einen Kondensator mit dem Gitter des Schirmgitterrohres *SR* verbunden. Eine Belichtung von *Ph* bewirkt also eine negative Aufladung des Gitters und damit ein momentanes Absinken des Anodenstromes in *SR*. Dadurch steigt das Potential des Punktes *P* auf einen höheren positiven Wert, so daß die Zündelektrode des Glimmrelais *GR* die zur Zündung der Entladung nötige Spannung erhält. Der Zündstrom durchfließt die Magnetspule des Zählwerks *Z*[1]). Der vom Magnet angezogene, den Nummernzähler betätigende Anker schließt im Augenblick der Fortbewegung der Ziffernrolle den Kontakt *K*, welcher die große Kapazität *C* parallel zum Glimmrelais legt: Die an *GR* liegende Spannung sinkt hierdurch ab, die Glimmentladung erlischt und der Anker des Zählwerkes schnappt in seine Ruhestellung zurück. Der zu *C* parallel liegende Widerstand *R* ist so zu bemessen, daß bis zum nächsten auf die Photozelle fallenden Lichtimpuls die Entladung von *C* beendet ist. Die Siebkette *S* war nötig, um eine Neuzündung des Glimmrelais sofort nach der Löschung durch den Kontakt *K* zu vermeiden; offenbar treten dabei Schwingungen auf, die durch *S* vermeidbar waren.

Die Zündspannung des Glimmrelais hängt sehr stark von seiner Beleuchtung ab; ganz im Dunkeln zündet es unregelmäßig. Eine gleichmäßige Hilfsbeleuchtung von *GR* ist am zweckmäßigsten, z. B. durch Zusammenbau von Glimmrelais und Beleuchtungslampe im gleichen Kasten.

Bei zu kleiner Geschwindigkeit des Radiometers streicht der Lichtzeiger langsam über die lichtelektrische Zelle. Dann zündet entweder *GR* überhaupt nicht oder aber es zündet sofort nach der Parallelschaltung von *C* wieder, weil die Zündspannung zu lange an der Zündelektrode liegt; dies zu vermeiden, dient die oben beschriebene Zwischenabbildung des Lichtzeigers.

4. Beispiele.

Im folgenden wird ein Beispiel einer Registrierung an einem Sommertag gegeben.

Zahl der Umdrehungen eines Radiometersystems, fortlaufend registriert, abgelesen von Minute zu Minute, Beginn 9^{52}. Ort: Atelier, nach Norden, hinter Glasfenstern.

Wetter: Schnellziehende, helle Wolken, meist Sonne.

28 31 39 47 35 38 41 41 38 36 44 35 44 36 32 32 21 20 18 17 16 23 26 27 28 28 30 32 36 38 42 43 37 38 30 22 20 24 23 24 25 32 25 (10^{35}) bis (11^{05}) im Mittel 38 ,Sonne sehr hell, hellweiße Wolken (11^{05}) 38 41 66 57 65 68 67. Sonne verblaßt plötzlich 57 27 ... Bildung einer grauen Wolkendecke (12^{24}) 33 22 26 26 38 27 43 35 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 29 28 27 (13^{02}) sehr dunkel werdend 23 7 5 4 5 17 11 12 13 ... 7 13 13 17 18 23 21 30 heller werdend,

1) Einfacher als die hier beschriebene Anordnung ist vielleicht die Verwendung einer Sperrschichtphotozelle mit Gleichstromverstärkung.

1) Wir benutzten ein von Herrn Geiger konstruiertes, von Herrn Speidel in Tübingen gebautes Zählwerk.

ungleichmäßig bedeckter Himmel, keine Sonne 30 30 27 36 34 34 28 40 40 28 35 (13^{41}).

Um die vorkommenden Schwankungen der Strahlung zu zeigen, wurde das Zählwerk minutlich abgelesen. Die Zahlen sind proportional der Helligkeit; sie zeigen ihre sehr starken Schwankungen in kurzer Zeit, welche entweder durch Abblendung der Sonnenstrahlen durch Wolken (Abnahme) oder durch Vorbeiziehen hell erleuchteter Wolken (Zunahme) bedingt sind. Letztere bedingen wesentlich die Helligkeit in Räumen. In der Mitte unseres großen Hörsaals zeigte ein Radiometer z. B. an einem sehr hellen Sommermorgen mit vereinzelten hellen Kumuluswolken von 7^{15} bis 8^{05} im Mittel 1,6 Umdrehungen pro Minute, um 9^{00} aber bei wolkenlosem Himmel nur noch 1,2. Aus dem Protokoll eines anderen Tages ergibt sich:

Zeit	8^{00}	9^{30}	11^{00}	12^{00}	14^{00}	16^{30}	18^{15}
Wetter	wolkig	stark bewölkt	fliegende helle Wolken	helle Wolken			wolkenlos klar
U/min	1,3	1,1	2–1,5	2,1	2,4	2,2	0,4 (!)

Die sehr geringe Zimmerhelligkeit bei wolkenlosem klaren Himmel (0,4) sei verglichen mit der Helligkeit an den folgenden Tagen zur etwa gleichen Zeit: sehr dunstig, bewölkt: 0,4, dunkle Wolkendecke 0,15.

Zusammenfassung.

Es wird ein Gerät beschrieben zur unmittelbaren Registrierung der gesamten Helligkeitsmenge während kürzerer und längerer Zeiten, das auf der Zählung der Umdrehungen eines Crookesschen Radiometers beruht.

München, Physikalisches Institut der Universität, August 1937.

(Eingegangen 11. August 1937.)

Zur hydrodynamischen Form der Wellenmechanik.

Von Hans Ertel.

Die relativistische Schrödingergleichung spinfreier Elementarteilchen

$$\left|\left(\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_k}+\frac{e}{c}\Phi_k\right)^2+m_0c^2\right|\psi=0 \qquad (1)$$

kann durch den de Broglieschen Ansatz

$$\psi=\alpha\cdot\exp\left(\frac{i\,2\pi}{h}S\right) \qquad (2)$$

bekanntlich in die beiden Gleichungen

$$\left[\frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}+\frac{e}{c}\Phi_k\right)\right]^2+\left(1-\frac{h^2}{4\pi^2m_0^2c^2}\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right)c^2=0 \qquad (3)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{e}{m_0c}\alpha^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}+\frac{e}{c}\Phi_k\right)\right]=0 \qquad (4)$$

aufgespalten werden. Dabei wurde in (4) aus später ersichtlichen Gründen der Faktor e/m_0c hinzugefügt; im übrigen wurde die übliche Summationsvorschrift und Bezeichnungsweise verwendet ($x_1x_2x_3x_4=x,y,z,ict$; $\Phi_1\Phi_2\Phi_3\Phi_4=A_x, A_y, A_z, i\varphi$). Schreiben wir (4) in der Form

$$\frac{\partial J_k}{\partial x_k}=0 \quad \text{mit} \quad J_k=\frac{e}{m_0c}\alpha^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}+\frac{e}{c}\Phi_k\right), \qquad (5)$$

so ist wegen (2)

$$J_k=\frac{e}{m_0c}\left[\frac{h}{4\pi i}\left(\overset{*}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_k}-\psi\frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\partial x_k}\right)+\frac{e}{c}\Phi_k\overset{*}{\psi}\psi\right], \qquad (6)$$

also gleich dem Erwartungswert der elektrischen Stromdichte, die mit dem elektromagnetischen Feld

$$F_{jk}=\frac{\partial\Phi_j}{\partial x_k}-\frac{\partial\Phi_k}{\partial x_j} \qquad (7)$$

durch das Maxwellsche Quadrupel

$$J_k=\frac{\partial F_{kj}}{\partial x_j} \qquad (8)$$

zu verknüpfen ist. Der Vergleich von (3) mit der Bedingungsgleichung

$$u_k^2=-c^2 \qquad (9)$$

des Vierervektors der Geschwindigkeit u liefert

$$u_k = \frac{\frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{e}{c}\Phi_k\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi m_0 c}\right)^2 \frac{\Box\alpha}{\alpha}}} = \frac{v_k}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi m_0 c}\right)^2 \frac{\Box\alpha}{\alpha}}}, \tag{10}$$

wobei zur Abkürzung

$$v_k = \frac{1}{m_0}\left(\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{e}{c}\Phi_k\right) \tag{11}$$

gesetzt wurde.

Aus den Gleichungen (3) und (4) läßt sich ein symmetrischer Tensor zweiten Ranges konstruieren, dessen Divergenz verschwindet und der daher als Energie-Impuls-Tensor des vorliegenden Problems anzusprechen ist. Wir schreiben zunächst (3) in der Form

$$0 = -v_k^2 + \left(\frac{h}{2\pi m_0}\right)^2 \frac{\Box\alpha}{\alpha} - c^2, \tag{12}$$

bilden den Gradienten

$$0 = -v_k \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{h^2}{8\pi^2 m_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right), \tag{13}$$

und addieren auf beiden Seiten $v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$

$$v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = v_k\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right) + \frac{h^2}{8\pi^2 m_0^2} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right). \tag{14}$$

Wegen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = \frac{e}{m_0 c} F_{ik} \tag{15}$$

mit

$$S_{ik} = \frac{h^2}{8\pi^2 m_0}\left|2\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} - \delta_{ik}\left[\alpha\Box\alpha + \left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)^2\right]\right| = \frac{h^2}{4\pi^2 m_0}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} - \frac{\delta_{ik}}{4}\Box(\alpha^2)\right|, \tag{21}$$

so daß (16) die Form

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{22}$$

mit dem Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ik} = m_0\alpha^2 v_i v_k + E_{ik} + \frac{h^2}{4\pi^2 m_0}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\Box(\alpha^2)\right| \tag{23}$$

annimmt. Dabei ergibt sich der Beweis zu (20) sofort aus

$$\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha\Box\alpha) - 2\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Box\alpha$$

und

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\Box\alpha = \frac{\partial}{\partial x_k}\left|\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} - \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x_j}\right)^2\right|,$$

wobei δ_{ik} wie in (19) den Einheitstensor bedeutet.

nimmt (14) nach Multiplikation mit $m_0\alpha^2$ mit Rücksicht auf (4) die Form

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(m_0\alpha^2 v_i v_k) = J_k F_{ik} + \frac{h^2}{8\pi^2 m_0}\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right) \tag{16}$$

an, da ja nach (5) und (11)

$$J_k = \frac{e}{c}\alpha^2 v_k. \tag{17}$$

Bekanntlich ist nun

$$J_k F_{ik} = F_{ik}\frac{\partial F_{kj}}{\partial x_j} = -\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_k}, \tag{18}$$

worin

$$E_{ik} = F_{ij}F_{kj} - \tfrac{1}{4}\delta_{ik}F_{jn}F_{jn} \tag{19}$$

den elektromagnetischen Energietensor bedeutet. Auch der letzte Term der rechten Seite von (14) kann auf Tensordivergenzform gebracht werden, denn es ist

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m_0}\alpha^2 \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right) = -\frac{\partial S_{ik}}{\partial x_k} \tag{20}$$

Mit (22) und (23) ist aber die Aufgabe zurückgeführt auf ein Problem der relativistischen Hydrodynamik: Bewegungsgleichungen und Kontinuitätsgleichung einer elektrisch geladenen Flüssigkeit sind enthalten in

$$\frac{\partial M_{ik}}{\partial x_k} = 0 \tag{24}$$

mit dem gesamten Energie-Impuls-Tensor

$$M_{ik} = \varrho u_i u_k + E_{ik} + P_{ik}, \tag{25}$$

worin E_{ik} den elektromagnetischen Energietensor (19) und P_{ik} den hydrodynamischen Spannungstensor bedeutet. Der Vergleich von (23) mit (25) ergibt:

$$P_{ik} = S_{ik} = \frac{h^2}{4\pi^2 m_0}\left\{\frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\frac{\partial\alpha}{\partial x_k} - \frac{1}{4}\delta_{ik}\Box(\alpha^2)\right\} \tag{26}$$

und $\varrho u_i u_k = m_0\alpha^2 v_i v_k$, also wegen (10):

$$\varrho = m_0\alpha^2\left\{1 - \left(\frac{h}{2\pi m_0 c}\right)^2\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right\}. \tag{27}$$

Der Unterschied zwischen (27) und dem davon abweichenden Ergebnis

$$\varrho = m_0\alpha^2\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi m_0 c}\right)^2\frac{\Box\alpha}{\alpha}}, \tag{28}$$

das man durch Vergleich von

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\alpha^2\left(\frac{\partial S}{\partial x_k} + \frac{e}{c}\Phi_k\right)\right] = 0 \tag{29}$$

mit der Form

$$\frac{\partial(\varrho u_k)}{\partial x_k} = 0 \tag{30}$$

der Kontinuitätsgleichung der Materie erhalten hat[1]), klärt sich dadurch auf, daß im vorliegenden Problem die Kontinuitätsgleichung der Materie gar nicht die Form (30) haben kann, denn es folgt aus (24) und (25)

$$\frac{\partial(\varrho u_k)}{\partial x_k} = \frac{u_i}{c^2}\frac{\partial P_{ik}}{\partial x_k} \tag{31}$$

mit Rücksicht auf (9) und $u_i J_k F_{ik} = 0$.

Aus (10), (17) und (27) folgt für die elektrische Stromdichte

$$J_k = \varrho u_k\left(\frac{e}{m_0 c}\right)\left(1 - \frac{h^2}{4\pi^2 m_0^2 c^2}\frac{\Box\alpha}{\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{32}$$

mithin ist der Erwartungswert für die Stromdichte der Materie

$$\varrho u_k = \left[\frac{h}{4\pi i}\left(\overset{*}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} - \psi\frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\partial x_k}\right) + \frac{e}{c}\Phi_k\overset{*}{\psi}\psi\right]\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi m_0 c}\right)^2\frac{\Box\alpha}{\alpha}}, \tag{33}$$

also verschieden vom Erwartungswert (6) der elektrischen Stromdichte[2]). Für (33) kann wegen

$$\sqrt{1 - \left(\frac{h}{2\pi m_0 c}\right)^2\frac{\Box\alpha}{\alpha}} = \frac{1}{m_0 c}\sqrt{-\sum_1^4\left(\frac{\partial S}{\partial x_j} + \frac{e}{c}\Phi_j\right)^2} = \frac{h}{4\pi m_0 c}\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\psi}{\psi\partial x_j} - \frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\psi}\partial x_j} + i\,\frac{4\pi e}{hc}\Phi_j\right)^2}$$

auch

$$\varrho u_k = \frac{m_0 c}{i}\left(\frac{h}{4\pi m_0 c}\right)^2\overset{*}{\psi}\psi\left(\frac{\partial\psi}{\psi\partial x_k} - \frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\psi}\partial x_k} + i\,\frac{4\pi e}{hc}\Phi_k\right)\cdot\sqrt{\sum\left(\frac{\partial\psi}{\psi\partial x_j} - \frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\psi}\partial x_j} + i\,\frac{4\pi e}{hc}\Phi_j\right)^2} \tag{34}$$

geschrieben werden, und daraus folgt nach (9)

$$\varrho = m_0\overset{*}{\psi}\psi\left(\frac{h}{4\pi m_0 c}\right)^2\sum_1^4\left(\frac{\partial\psi}{\psi\partial x_j} - \frac{\partial\overset{*}{\psi}}{\overset{*}{\psi}\partial x_j} + i\,\frac{4\pi e}{hc}\Phi_j\right)^2 \tag{35}$$

als Erwartungswert für die Dichte der Materie.

1) A. Landé, Handbuch der Physik, XX, 417.
2) P. Jordan, Anschauliche Quantentheorie. Berlin 1936, S. 209.

Berlin, Meteorologisches Institut der Universität. (Eingegangen 10. August 1937.)

BERICHTE.

Über den heutigen (1. Juni 1937) Stand der Theorie des β-Zerfalls.

Von G. Gamow.

Die weitgehende Entwicklung unserer Kenntnis über die Atomkerne während der letzten zehn Jahre hat uns zu einer scharfen Unterscheidung zwischen zwei verschiedenen Klassen von Kernprozessen geführt.

Zur ersten Klasse gehören alle Prozesse, in denen die fundamentalen Kernbausteine, Neutronen und Protonen, sich wie unzerlegbare Elementarteilchen benehmen. Man konnte erwarten, daß alle diese Prozesse, bei denen die Teilchengeschwindigkeiten immer klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, durch die gewöhnliche Wellenmechanik beschrieben werden können. In der Tat ist es gelungen, durch Einführung gewisser empirischer Wechselwirkungskräfte zwischen den schweren Kernbausteinen zu einer genügenden Erklärung der Kernbindungsenergien und der Stabilitätsgesetze zu kommen. Auch der Verlauf verschiedener Kernumwandlungen, an denen nur schwere Teilchen teilnehmen (natürlicher α-Zerfall und Kernzertrümmerung), kann im Rahmen dieser Theorie verstanden werden; Rechnungen mit einer den Kern umgebenden Potentialschwelle, einer Coulombkraft, beschreiben sie quantitativ. Außer den oben betrachteten Prozessen kennt man aber auch Fälle, wo ein Kern spontan ein β-Teilchen, d. h. ein negatives oder positives Elektron, emittiert und sich damit in einen isobaren Kern von größerer oder kleinerer Atomnummer verwandelt. Solche β-Aktivität betrachtet man als innere Umwandlung eines Kernneutrons in ein Kernproton (oder umgekehrt), die mit der Entstehung eines Elektrons und, wie wir später sehen werden, eines hypothetischen Teilchens, des Neutrino, verbunden ist.

Eine solche β-Umwandlung wird dann stattfinden, wenn die relative Anzahl von Neutronen und Protonen im gegebenen Kern nicht zum tiefsten Energiezustand gehört und es also energetisch günstig ist, die Zahl der Neutronen und Protonen im Kern zu ändern. Obwohl die energetische Möglichkeit und, bis zu gewissem Grade, die Wahrscheinlichkeit solcher β-Zerfälle mit dem inneren Aufbau der Kerne aus schweren Teilchen sehr eng zusammenhängt, stellen diese Prozesse ein ganz neues Gebiet dar, für dessen Verständnis und Beschreibung ganz neue Annahmen und Theorien über die Eigenschaften von schweren Teilchen und über ihre Umwandlungen ineinander nötig sind.

Kernaufbau und Bedingungen des β-Zerfalls.

Wie schon oben erwähnt, betrachtet man heutzutage einen Kern als ein Konglomerat von Neutronen und Protonen, die durch gewisse Anziehungskräfte zusammengehalten werden. Die Eigenschaften dieser Kräfte kann man z. B. empirisch aus Streuversuchen zwischen schweren Elementarteilchen ableiten. Die Untersuchungen von Zusammenstößen zwischen zwei Protonen und zwischen einem Proton und einem Neutron zeigen ganz deutlich, daß es zwischen diesen Teilchen sehr starke Anziehungskräfte gibt, die nur auf sehr kleine Abstände (von der Größenordnung 10^{-13} cm) wirken. Genauere Abschätzungen haben gezeigt, daß Proton-Proton- und Neutron-Protonkräfte innerhalb der experimentellen Fehler einander gleich sind. Es ist naheliegend, anzunehmen, daß auch die Neutron-Neutronkräfte (deren direkte Bestimmung mit großen experimentellen Schwierigkeiten verbunden ist) dieselbe Größe haben. Obwohl die Kräfte zwischen zwei schweren Elementarteilchen offenbar von den Teilchenladungen unabhängig sind, hängen die Kräfte von der relativen Orientierung der Spins beider Teilchen ab. Im Neutron-Protonfall ist die Anziehung wesentlich stärker, wenn beide Teilchen parallele Spins haben. Es wurde auch bisher stets angenommen, daß die Wechselwirkungen zwischen schweren Teilchen im Kernkonglomerat durch die Absättigung von Valenzen begrenzt ist; auf die Bedeutung und Notwendigkeit dieser Annahme werden wir später eingehen.

Die Verteilung von Neutronen und Protonen auf die verschiedenen Quantenniveaus im Kern ist durch das Pauli-Prinzip bedingt, nach dem nur zwei Neutronen und zwei Protonen (mit entgegengesetztem Spin) sich im selben Quantenzustand befinden können. Sieht man zunächst von den Coulombkräften zwischen den Protonen ab, so ist das Problem wegen der gleichen Wechselwirkungen, die wir angenommen haben, und wegen der beinahe gleichen Massen von Neutronen und Protonen in beiden Teilchenarten symmetrisch. Die Quantenzustände von Neutronen fallen mit denen von Protonen zusammen; wie man einfach sehen kann, wird der Zustand tiefster Energie für eine gleiche Anzahl von Neutronen und Protonen erreicht; das ist

der Fall für leichte Kerne, wo wegen der kleinen Gesamtladung die Coulombkräfte ziemlich wenig ausmachen. Bei wachsender Teilchenzahl treten die Coulombkräfte (die mit Z^2 wachsen) mehr und mehr hervor, und die Protonenniveaus werden, verglichen mit den Neutronenniveaus, allmählich nach oben verschoben. Der Zustand tiefster Energie wird, das ist klar, erreicht, wenn beide Niveausysteme „gleich hoch" mit Teilchen angefüllt sind; das führt zu einer relativ größeren Anzahl von Neutronen; letzteres gilt für schwerere Elemente.

Ist für ein gegebenes Atomgewicht (d. h. Gesamtzahl von schweren Teilchen) die Anzahl von Neutronen oder Protonen größer, als der tiefsten Energie entspricht, so wird man eine innere Umwandlung erwarten, bei der sich ein Neutron in ein Proton umwandelt (oder umgekehrt) und ein Elektron (negatives oder positives) freigemacht wird. Die notwendige Bedingung für eine solche Umwandlung besteht natürlich darin, daß der Massenunterschied zwischen Ausgangs- und Endkern genügend groß ist, um das Massenäquivalent des ausgestrahlten Elektrons und des Neutrinos zu liefern und außerdem für beide Teilchen kinetische Energie im Überschuß zur Verfügung zu stellen.

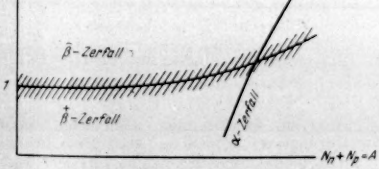

Fig. 1. Kernstabilitätsgebiete (schematisch).

In Fig. 1 ist die schematische Darstellung der Kernstabilitätsgrenzen gegeben. Jeder Kern ist durch einen Punkt im Koordinatensystem dargestellt, dessen Abszisse die Gesamtzahl der schweren Bausteine (Atomgewicht) und dessen Ordinate das Verhältnis von Neutronen zu Protonen angibt. Das gestrichelte Gebiet umfaßt die Kerne, die, nach unseren obigen Betrachtungen, im tiefsten Energiezustand sind. Oberhalb des Stabilitätsbandes liegt das Gebiet von β^--aktiven Kernen (zuviel Neutronen) und unterhalb das Gebiet von β^+-aktiven Kernen (zuviel Protonen). Die stark ausgezogene Linie gibt die die α-Zerfallsgrenze: die Kerne rechts von dieser Linie können wegen ihrer sehr großen Ladung ein α-Teilchen emittieren. Aus diesem Diagramm kann man einfach ersehen, wie verschiedene β-aktive Kerne bei spontanen oder künstlichen Kernreaktionen entstehen können. Bei α-Zerfall $\begin{pmatrix} A \to A-4 \\ Z \to Z-2 \end{pmatrix}$ wird der Quotient $\frac{A-Z}{Z}$ immer vergrößert und A verkleinert; das schiebt den den Kern darstellenden Punkt „nach oben links" in das Gebiet der β^--labilen Kerne. Als Beispiel dienen hier alle β^--aktiven Kerne der radioaktiven Familien, die durch α-Zerfall entstanden sind. Bei künstlichen Kernumwandlungen, die durch Neutronenbeschießung angeregt sind, werden α-Teilchen, Protonen und γ-Quanten ausgesandt:

$$\begin{pmatrix} A \to A-3, & A \to A & ; & A \to A+1 \\ Z \to Z-2; & Z \to Z-1 & ; & Z \to Z \end{pmatrix};$$

alle drei Prozesse führen zu einer Vergrößerung von $\frac{A-Z}{Z}$ und folglich zur Möglichkeit von β^--aktiven Kernen (Fermi-Effekte). Z. B. haben wir:

$$Al^{27}_{13} + n^1_0 \to He^4_2 + Na^{24}_{11}\ (\beta^-\text{-aktiv}), \quad \text{(I)}$$

$$Si^{28}_{14} + n^1_0 \to H^1_1 + Al^{28}_{13}\ (\beta^-\text{-aktiv}), \quad \text{(II)}$$

$$K^{41}_{19} + n^1_0 \to h\nu + K^{42}_{19}\ (\beta^-\text{-aktiv}). \quad \text{(III)}$$

Auch die Aussendung eines Protons bei α-Beschießung $\begin{pmatrix} A \to A+3 \\ Z \to Z+1 \end{pmatrix}$ kann zu β^--Aktivität führen, wie z. B.:

$$Mg^{25}_{12} + He^4_2 \to H^1_1 + Al^{28}_{13}\ (\beta^-\text{-aktiv}). \quad \text{(IV)}$$

Wird dagegen bei α- oder Protonenbeschießung ein Neutron herausgeworfen:

$$\begin{pmatrix} A \to A+3, & A \to A \\ Z \to Z+2; & Z \to Z+1 \end{pmatrix},$$

so wird $\frac{A-Z}{Z}$ im allgemeinen verkleinert, und man kann die Entstehung von β^+-aktiven Kernen erwarten (Curie-Joliot-Effekte), wie z. B.:

$$B^{10}_5 + He^4_2 \to n^1_0 + N^{13}_7\ (\beta^+\text{-aktiv}) \quad \text{(V)}$$

$$N^{14}_7 + H^1_1 \to n^1_0 + O^{14}_8\ (\beta^+\text{-aktiv}). \quad \text{(VI)}^1)$$

Auch das Einfangen eines geladenen positiven Teilchens (Proton oder α-Teilchen unter Aussendung eines γ-Quantes) kann zu β^+-Aktivität führen, wie z. B.:

$$C^{12}_6 + H^1_1 \to h\nu + N^{13}_7\ (\beta^+\text{-aktiv}). \quad \text{(VII)}$$

Wir sollten hier bemerken, daß genauere Betrachtungen der Kernstruktur zeigen, daß die oben gegebene scharfe Trennung von β^-- und

1) Dieser Reaktionstypus ist noch nicht beobachtet, da er nur für sehr energiereiche Protonen energetisch möglich ist.

β^+-labilen Gebieten in einigen Sonderfällen gestört sein kann. Es ist nämlich nicht ganz gerechtfertigt, die Bindungsenergie des Kernes nur einfach als Funktion der relativen Anzahl von Neutronen und Protonen zu betrachten. Wegen der besonders großen Bindungsenergie von zwei Neutronen und zwei Protonen (ein α-Teilchen) könnte man erwarten, daß die Kerne mit gerader Anzahl jeder Teilchenart etwas stärker gebunden sein sollten als die Kerne mit ungerader Anzahl. In Fig. 2 ist der schematische Verlauf von

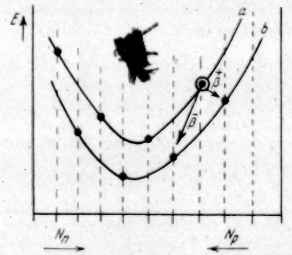

Fig. 2.
Energiekurven für isobare Kerne (schematisch).
a) ungerade Z. b) gerade Z.

Energiekurven für die isobaren Kerne mit dem Atomgewicht 10 gegeben. Die Energien der Kerne, die eine gerade Anzahl von Neutronen und Protonen aufweisen, liegen etwas niedriger (Kurve *b*) als die für ungerade Anzahlen (Kurve *a*). Man kann aus dieser Figur sofort entnehmen, daß es nicht ausgeschlossen ist, daß ein Kern gleichzeitig β^+- und β^--aktiv ist. Es ist Lawrence in der Tat gelungen, einen aktiven *Cu*-Kern zu erzeugen, der gleichzeitig beide, β^+- und β^-, Zerfälle zeigt.

Energie- und Spinerhaltung beim β-Zerfall und Neutrinohypothese.

Die Eigentümlichkeit des β-Zerfalls, die ihn von gewöhnlichen Kernumwandlungen so scharf unterscheidet, besteht darin, daß die von einer bestimmten aktiven Substanz ausgesandten β-Teilchen eine kontinuierliche Energieverteilung zeigen. Die β-Spektren von verschiedenen Elementen erstrecken sich von sehr kleinen Energiewerten bis zu einer bestimmten, für jedes Element charakteristischen oberen Grenze (deren Existenz zuerst von Sargent nachgewiesen wurde); die Verteilungskurve erreicht ein Maximum bei einer Energie, die etwa einem Drittel der oberen Energiegrenze entspricht. Typische β-Spektren sind in Fig. 3 wiedergegeben: a) gibt die Energieverteilung für einen schweren β^--aktiven Kern (*RaE*) wieder und b) für einen leichten β^+-aktiven Kern (P^{30}). (Die dünn ausgezogenen Kurven gehören zu theoretischen Betrachtungen, die wir später diskutieren wollen.)

Es ist viel über die Entstehung dieser kontinuierlichen Energieverteilung diskutiert worden. Zuerst wurde an die Möglichkeit gedacht, daß die beobachtete kontinuierliche Verteilung sekundären Ursprungs ist und ihren Grund in der Absorption des primär homogenen β-Strahlbündels im zerfallenden Element selbst hat; das wurde durch die Versuche von Ellis widerlegt. Ellis hat nämlich kalorimetrisch die Gesamtenergie gemessen, die beim β-Zerfall von *RaE* (dieses Element sendet nur β-Strahlung aus) geliefert wird, und gezeigt, daß diese Energie mit der mittleren, aus magnetischen Spektren

Fig. 3. β-Spektren, Vergleich der Fermischen und U.-K.-Theorie mit der Erfahrung (schematisch).
a) β^--aktiver Kern (*RaE*). b) β^+-aktiver Kern (P^{30}).

bestimmten Energie der β-Teilchen übereinstimmt. Das beweist, daß bei den Aufnahmen der magnetischen β-Spektren keine Energie in der radioaktiven Schicht absorbiert wurde (sonst müßten die kalorimetrischen Messungen mit der oberen Grenze der beobachteten magnetischen Spektren übereinstimmen). Sieht man die beobachtete kontinuierliche Energieverteilung als primär an, so muß man, nach dem Energieerhaltungssatz, annehmen, daß diese Energieunterschiede durch irgendeine, bis jetzt nicht bekannte Strahlung kompensiert werden. Die neue Strahlung konnte weder elektromagnetischer Natur sein, noch konnte sie aus geladenen Teilchen bestehen, da man sie in beiden Fällen ohne Schwierigkeiten durch Ionisation hätte bemerken müssen. Nach Vorschlag von Pauli nimmt man jetzt an, daß diese Strahlung aus neutralen Teilchen sehr kleiner Masse (Elektronenmasse oder weniger) besteht; die kleine Masse ist notwendig, da sich bekanntlich beim β-Zerfall das Atomgewicht nicht ändert. Die Ausstrahlung solcher Teilchen, die Neutrinos genannt werden, würde man nur sehr schwer beobachten können, da wegen ihrer Neutralität und ihrer kleinen Masse ihre Wechselwirkung mit Materie vernachlässigbar klein sein sollte; ein Teilchen solcher Art könnte mehrere Kilometer in Materie zurücklegen, ohne irgendeine merkliche Wirkung zu hinterlassen.

Betrachtet man einen β-Zerfall als gleichzeitige Emission eines Elektrons und eines Neutrinos, so wird die ganze zur Verfügung stehende Umwandlungsenergie auf beide Teilchen statistisch verteilt. Könnte man eine Methode finden, die Neutrinos direkt zu beobachten und ihre Energie zu messen, so würde man eine Energieverteilung finden, die reziprok zur β-Verteilung ist, das Maximum läge z. B. bei zwei Drittel der oberen Energiegrenze. Die beobachtete obere Grenze des β-Spektrums entspricht also dem Fall, daß das Elektron die ganze zur Verfügung stehende Umwandlungsenergie aufnimmt, und das Neutrino ungefähr mit der Geschwindigkeit Null herausfliegt. Diese obere Grenze kann man deshalb in Energiebilanzen für Kernumwandlungen einführen. Als Beispiel nehmen wir den von Ellis und Mott betrachteten Fall der Gabelungsstelle bei der Thoriumreihe:

$$\begin{array}{ccccc} & \xrightarrow{\beta} & ThC^{\mathrm{I}} & \xrightarrow{\alpha} & \\ ThC & & & & ThD. \\ & \xrightarrow{\alpha} & ThC^{\mathrm{II}} & \xrightarrow{\beta} & \end{array} \qquad \text{(IX)}$$

Die Energien der α-Teilchen sind auf dem oberen bzw. unteren Weg 8,96 bzw. 6,20 MV. Die oberen Energiegrenzen für die β-Spektren von ThC und ThC^{II} sind 2,20 und 1,82 MV. Wir müssen noch in Betracht ziehen, daß ThC zwei starke γ-Linien besitzt, von denen beide mit einem Quant pro Zerfall auftreten; man muß also die Energien beider γ-Quanten ($h\nu = 0{,}58$ und 2,62 MV.) auf dem zweiten Weg mitrechnen. Für die Gesamtenergieabgabe zwischen ThC und ThD auf den zwei verschiedenen Wegen bekommen wir also:

$$2{,}20 + 8{,}96 = 11{,}16$$
$$6{,}20 + 1{,}82 + 0{,}58 + 2{,}62 = 11{,}22,$$

was innerhalb der experimentellen Fehlergrenze den Energieerhaltungssatz befriedigt. Hätten wir hier die mittleren β-Energien statt der oberen Grenzen eingeführt, so würden wir keine Übereinstimmung erhalten haben. Außer der Beseitigung von Schwierigkeiten bei der Energieerhaltung ermöglicht die Einführung des Neutrinos auch die Befriedigung des Drehimpulserhaltungssatzes beim β-Zerfall. Untersuchungen der Hyperfeinstruktur von Spektrallinien geben uns die Möglichkeit, die Drehimpulse (oder Spinwerte) verschiedener Kerne experimentell zu bestimmen. Wie man auch theoretisch erwarten konnte, findet man immer, daß der Kernspin ein ganzzahliges Vielfaches eines halben Bohrschen Drehimpulsquantums $\hbar/2$ ist. Für Kerne mit geradem Atomgewicht findet man immer ein gerades Vielfaches (also $n\hbar$) und für die mit ungeradem Atomgewicht ungerade Vielfache [also $(n+\frac{1}{2})\hbar$]. Da beim β-Zerfall das Atomgewicht nicht geändert wird, schließen wir, daß der Spinunterschied zwischen ursprünglichem und durch β-Zerfall entstandenen Kern ein ganzes Vielfaches von $\hbar$ sein muß. Dagegen übernimmt das ausgesandte Elektron ein ganzes Vielfaches von $\hbar$ als Bahnimpuls und noch eine Hälfte von $\hbar$ als Spin. Es geht also eine Hälfte von $\hbar$ (oder eine ungerade Anzahl von Hälften) verloren, und der Drehimpulserhaltungssatz kann nur dadurch gerettet werden, daß man die hypothetische Aussendung eines zweiten Teilchens, eines Neutrinos postuliert, dessen Spin ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\hbar$ ist. Am einfachsten nimmt man an, daß ein Neutrino (ebenso wie ein Elektron) den Spin $\hbar/2$ besitzt. Obwohl wir dazu geführt werden, dem Neutrino ein mechanisches Moment (Spin) zuzuschreiben, scheint es doch sehr unwahrscheinlich, daß es ein magnetisches Moment besitzt, da es dann doch Ionisation hervorrufen könnte. Nach Experimenten von Nahmias ist das Ionisationsvermögen des Neutrinos kleiner als ein Ionenpaar auf $5 \cdot 10^5$ km in Luft. Daraus rechnet Bethe aus, daß, wenn ein Neutrino überhaupt ein magnetisches Moment besitzt, es kleiner als $\frac{1}{7\,0\,0\,0}$ des Elektronenmagnetons oder als $\frac{1}{4}$ des Kernmagnetons sein müßte. Wie schon oben bemerkt, muß die Neutrinomasse μ von derselben Größenordnung oder kleiner als die Elektronenmasse m sein. Eine obere Grenze für die Neutrinomasse kann man durch folgende Betrachtungen angeben. Betrachten wir zwei isobare Atome, die sich nur durch eine Ladungseinheit unterscheiden (Atomnummern Z und $Z+1$), schreiben M_z und M_{z+1} für die Massen der zugehörigen Kerne, so sind die Atommassen $A_z = M_z + Zm$ und $A_{z+1} = M_{z+1} + (Z+1)m$. Ist nun $A_z > A_{z+1}$, d. h. $M_z > M_{z+1} + m$ und vernachlässigen wir die Neutrinomasse, so ist die β-Umwandlung $M_z \to M_{z+1} + e^- + \nu$[1]) energetisch möglich. Nehmen wir jetzt umgekehrt $A_z < A_{z+1}$ oder $M_z < M_{z+1} + m$, so wird, wieder bei Vernachlässigung der Neutrinomasse, der andere Prozeß energetisch möglich, indem der Kern M_{z+1} ein Atomelektron schluckt und ein Neutrino aussendet $M_{z+1} + e^- \to M_z + \nu$. Man sieht also, daß man mit $\mu = 0$ keine stabilen Paare von Isobaren haben könnte, die sich nur durch eine Ladungseinheit unterscheiden. Nimmt man aber eine endliche Neutrinomasse $\mu \neq 0$ an, so werden solche stabilen Paare vorkommen, wenn die Bedingung $|A_z - A_{z+1}| < \mu$ erfüllt ist. In der Tat gibt es drei solche Paare für Atomgewichte zwischen 1 und 150 (Cd^{113} In^{113};

1) ν steht hier für Neutrino.

In^{115} Sn^{115}; Sb^{123} Te^{123}). Durch statistische Betrachtungen der Bindungsenergieunterschiede zwischen benachbarten Kernen ist Bethe zum Schluß gekommen, daß man diese Anzahl von Paaren (2 Proz.) erwarten kann, wenn die Neutrinomasse etwa ein Zehntel der Elektronenmasse ist ($\mu \sim \frac{1}{10} m$). Man muß aber beachten, daß der so erhaltene Wert eigentlich nur die obere Grenze für die Neutrinomasse gibt; in der Tat kann man nie sicher sein, daß einige von den drei obengenannten Paaren oder sogar alle drei in Wirklichkeit nicht stabil sind, sondern nur wegen ihrer außerordentlich langen Umwandlungszeiten ($> 10^9$ Jahre) mit anderen stabilen Kernen in der Erdkruste gemischt sind.

Zum Schluß möchten wir bemerken, daß, obwohl alle Eigenschaften des Neutrinos seinen direkten Nachweis sehr schwierig machen, solch ein Nachweis doch prinzipiell nicht ausgeschlossen ist. Am einfachsten könnte man das durch Untersuchung der Rückstoßkerne beim β-Zerfall erreichen. Betrachten wir zwei β-zerfallende Kerne eines gegebenen radioaktiven Elementes, von denen der eine ein schnelles, der andere ein langsames Elektron des kontinuierlichen Spektrums ausstrahlt. Wenn von unseren Kernen nur Elektronen ausgesandt werden, müßte der Kernrückstoß im zweiten Fall kleinere Energie haben. Nehmen wir aber die Neutrinohypothese an, so ist auch im zweiten Fall ein energiereicher Rückstoß zu erwarten, der durch das mit großer Energie herausgeworfene Neutrino verursacht ist. Experimente in dieser Richtung wurden von Leipunskij durchgeführt, sie zeigen, daß die Anzahl energiereicher Rückstoßkerne bedeutend größer ist, als man ohne die Neutrinohypothese auf Grund der Energieverteilung der β-Teilchen erwarten könnte. Diese Experimente können als erster Schritt für den direkten Nachweis des Neutrinos betrachtet werden.

Wahrscheinlichkeit des β-Zerfalls und Auswahlregeln.

Die Wahrscheinlichkeit für einen β-Zerfall wird gewöhnlich mit der Zerfallkonstanten λ beschrieben, die für verschiedene natürliche und künstliche β-aktive Körper in sehr breiten Grenzen variiert. Man muß beachten, daß in Fällen, wo dem β-Zerfall starke γ-Strahlung folgt, das beobachtete β-Spektrum aus vielen einzelnen Komponenten besteht, die der Bildung verschiedener angeregter Zustände des Produktkerns entsprechen. Wegen des kontinuierlichen Charakters der Energieverteilung kann man die beobachteten β-Spektren nicht direkt in einzelne Komponenten experimentell zerlegen. Wenn aber das Termschema und die Anregungswahrscheinlichkeiten der verschiedenen Niveaus des Produktkerns irgendwie anders bekannt sind (z. B. aus der Analyse der emittierten γ-Strahlung), so kann man die einzelnen β-Komponenten daraus berechnen; die oberen Grenzen der verschiedenen β-Komponenten unterscheiden sich offensichtlich durch die Anregungsenergien der verschiedenen zugehörigen Niveaus; die relativen Intensitäten sind den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten proportional. Man bekommt auf diese Weise für jede einzelne β-Komponente des komplexen β-Spektrums eine eigene obere Energiegrenze E_k und eine eigene (partielle) Zerfallkonstante λ_k, diese erfüllen natürlich die Bedingung $\sum_k \lambda_k = \lambda$. Ellis und Mott haben gezeigt, daß die beobachtete Energieverteilung bei komplexen β-Spektren mit genügender Genauigkeit durch Überlagerung solcher einzelnen Komponenten wiedergegeben werden kann.

In Analogie zur bekannten Geiger-Nuttal-Beziehung für den α-Zerfall konnte man erwarten, daß ein Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante und Energien (obere Grenzen) bei β-zerfallenden Kernen besteht. Ein solcher Zusammenhang wurde zuerst von Sargent nachgewiesen und ist in Fig. 4 dargestellt, wo $\log \lambda$ gegen $\log E_{max}$ für verschiedene β-aktive Körper aufgetragen ist. Wie man aus Fig. 4 ersieht, zerfallen die natürlichen radioaktiven Elemente in zwei Gruppen, die in dem Diagramm auf zwei parallelen Linien liegen. Bei ThC^1 und RaC^1, für die das Termschema des Produktkerns bekannt ist, sind die Punkte für die einzelnen β-Komponenten aufgetragen; man sieht, daß diese Punkte sich ebenfalls auf die zwei Kurven verteilen. Wir müssen hier aber darauf hinweisen, daß es scheinbar auch Übergänge gibt, die bedeutend kleinere Wahrscheinlichkeiten besitzen, als man es nach den zwei Sargentschen Kurven erwarten könnte. Z. B. wird, wie schon obenerwähnt, bei der β-Umwandlung $ThC'' \rightarrow ThD$ der Produktkern fast immer im angeregten Zustand gebildet. Das heißt, daß der β-Übergang zwischen den Grundzuständen von ThC'' und ThD (entsprechend einer Umwandlungsenergie von 5 MV.) mindestens 1000mal[1]) weniger wahrscheinlich ist, als andere Übergänge; in Fig. 4 ist für den entsprechenden Punkt nur die obere Grenze angegeben; er deutet ganz bestimmt darauf hin, daß außer den zwei Sargentschen Kurven noch andere existieren müssen, die zu kleineren Zerfallskonstanten für gegebene Energie gehören. Auch die natürlichen β-aktiven leichteren Elemente K^{40} und Rb^{86}, deren Zerfallskonstanten

1) Die Anregungswahrscheinlichkeit ist (100 ± 1) Proz. und die β-Gruppe, die nur 1 Proz. Intensität hat, wurde experimentell nicht bemerkt.

wegen Unkenntnis der relativen Häufigkeiten der aktiven Isotope nur sehr grob bekannt sind, liegen auf Kurven, die viel niedriger als die beiden Sargentschen Kurven verlaufen.

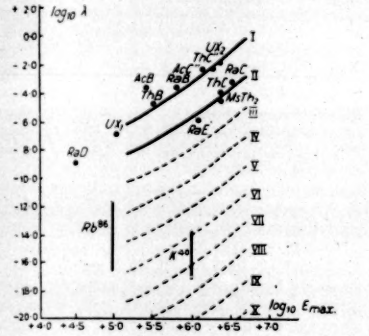

Fig. 4 a

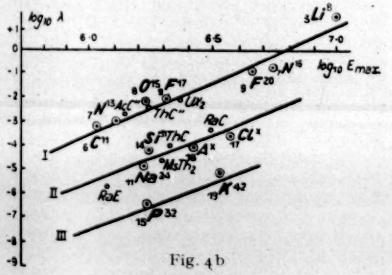

Fig. 4 b

Fig. 4. Sargentsche Kurven.
a) für natürliche Radioaktive. b) für künstliche Radioaktive.

Trägt man im Sargentschen Diagramm die Punkte für verschiedene künstliche β-aktive Elemente ein, die jetzt in großer Menge gemessen sind, so bekommt man im allgemeinen keine gute Übereinstimmung mit den beiden Sargentschen Kurven. Diese Abweichung ist aber sehr wahrscheinlich dadurch verursacht, daß bei diesen Kernen Atomgewichte und innere Struktur zu stark verschieden sind. In der Tat finden wir wieder einen regelmäßigen Anstieg nach der Sargentschen Beziehung, wenn wir nur die Reihen betrachten, deren Glieder vom selben Typus sind wie z. B. C_6^{11}, N_7^{13}, O_8^{15} und F_9^{19} (alle sind aus α-Teilchen minus einem Neutron aufgebaut). Obwohl wir die Theorie des β-Zerfalls erst im nächsten Abschnitt betrachten wollen, können wir schon jetzt die Bedeutung der Sargentschen Kurven angeben. Die Verteilung der β-aktiven Körper auf zwei oder mehrere parallele Kurven (die bei gegebener Energie sich um etwa den Faktor 100 unterscheiden) kann mit dem Drehimpuls des ausgesandten leichten Teilchens (also auch mit der Kernspinänderung bei der Umwandlung) in Zusammenhang stehen; das ist in dieser Hinsicht ganz analog der Verteilung der Ausstrahlungswahrscheinlichkeiten bei der optischen Emission auf Dipol-, Quadrupol- usw. Strahlung. Es wird angenommen, daß, genau wie für Lichtausstrahlung, die Wahrscheinlichkeit des β-Zerfalls durch die virtuellen Werte der Wellenfunktionen des Elektrons und des Neutrinos im Kerngebiet bestimmt ist, die durch Vorhandensein eines Bahnimpulses bedeutend verkleinert sein müssen. Es läßt sich zeigen, daß jedes Vielfache des Bahnimpulses die Zerfallskonstante etwa um den Faktor 100 verkleinern wird.

Diese Betrachtungen fordern die Existenz mehrerer parallellaufender Sargentscher Kurven, wie in Fig. 4 dargestellt ist. Die Tatsache, daß die Mehrzahl der Elemente zu den zwei ersten Kurven gehört, wird dadurch erklärt, daß die β-Übergänge auf den wahrscheinlichsten Wegen erfolgen; in analoger Weise sind bei den optischen Spektren hauptsächlich die Dipollinien beobachtet. Wir wollen jetzt versuchen, die Auswahlregel zwischen verschiedenen Sargentschen Kurven auf eine Kernspinänderung beim Zerfall zurückzuführen. Besitzen die zerfallenden und resultierenden Kerne die Spinwerte i und i', so muß vom Elektron und Neutrino mindestens der Drehimpuls $|i - i'|$ übernommen werden. Nehmen wir an, daß das ausgestrahlte Elektron und Neutrino immer mit antiparallelem Spin herausgeworfen werden, so muß der gesamte Drehimpuls als Bahnimpuls auftreten; wir kommen daher zum Schluß, daß die β-Umwandlungen, die mit der Spinänderung $|i - i'|$ verbunden sind, auf der $(|i - i'| + 1)$ten Kurve liegen müssen, oder sogar noch auf einer niedrigeren, wenn die Spinrichtung des Kerns sich beim Zerfall ändert. Man bekommt in diesem Fall also die folgende Anordnung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I } (\Delta i = 0); \quad \text{II } (\Delta i = 0, 1); \\ \text{III } (\Delta i = 0, 1, 2) \text{ usw.} \end{array}\right\} \quad \text{(A)}$$

Wir können auch die Annahme machen, daß beide leichten Teilchen mit parallelem Spin herausgeworfen werden[1]), in diesen Fällen wird

[1]) Die Annahme, daß Elektron und Neutrino immer mit parallelem Spin ausgestrahlt werden, sollte in bezug auf die Auswahlregel dasselbe Resultat ergeben.

dann ein Vielfaches des Drehimpulses kompensiert, und wir bekommen die Anordnung:

$$\left.\begin{array}{l} \text{I } (\Delta i = 0, 1); \quad \text{II } (\Delta i = 0, 1, 2); \\ \text{III } (\Delta i = 0, 1, 2, 3) \text{ usw.} \end{array}\right| \qquad \text{(B)}$$

Gamow und Teller haben gezeigt, daß man zwischen diesen zwei Möglichkeiten durch die Betrachtung der β-Umwandlungen $ThB \to ThC \to ThC'$ unterscheiden kann, die in Fig. 5 schematisch dargestellt sind. Die beiden

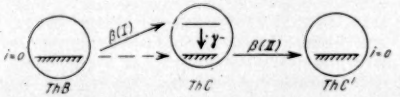

Fig. 5. Zerfallsschema $ThB \to ThC \to ThC'$.

Kerne ThB und ThC' besitzen gerade Atomnummern und Atomgewichte, und man darf annehmen, daß sie im Grundzustand beide den Spin Null haben; das kann man aber nicht von ThC sagen, da dieser Kern ungerade Atomnummer besitzt. Es ist auch bekannt, daß der β-Zerfall von ThB immer zum angeregten Zustand des ThC-Kerns führt; dieser geht nachher durch Quadrupol-γ-Strahlung in den normalen Zustand über, und wandelt sich dann durch einen zweiten β-Zerfall in den normalen Zustand des ThC'-Kernes um. Wie man aus Fig. 4 ersehen kann, gehört der erste β-Zerfall zur ersten und der zweite zur zweiten Sargentschen Kurve. Legen wir die Auswahlregel A zugrunde, so sollte der angeregte Zustand von ThC denselben Spin wie ThB (also Null) haben. Aus dem Quadrupolcharakter des γ-Überganges sollte man dann schließen, daß der Grundzustand von ThC den Spin 2 hat. Da ThC' den Spin Null besitzt, sollte nach der Auswahlregel A die zweite β-Umwandlung zur dritten Sargentschen Kurve gehören, das steht in Widerspruch mit der Erfahrung. Benutzt man aber die Auswahlregel B, so besteht mit allen empirischen Tatsachen vollständige Übereinstimmung. Führt man den β-Zerfall auf eine innere Umwandlung Neutron-Proton (oder umgekehrt) zurück, so entspricht die Regel A der Annahme, daß die Spinrichtung des schweren Teilchens sich bei der Umwandlung nicht ändert:

$$n\uparrow = p\uparrow + e^-\downarrow + \nu\downarrow \quad \text{oder} \quad p\uparrow + e^-\uparrow + \nu\downarrow \qquad \text{(C)}$$

Regel B läßt auch eine Spinänderung zu:

$$n\uparrow = p\downarrow + e^-\uparrow + \nu\uparrow \qquad \text{(D)}$$

Wir werden später sehen, daß das Umklappen oder Nichtumklappen des Spins schwerer Teilchen zu zwei verschiedenen Typen von Wechselwirkungskräften zwischen schweren Teilchen führt. Das oben erhaltene Resultat bedeutet also, daß man die Möglichkeit eines Spinumklappens bei der β-Umwandlung notwendigerweise zulassen muß.

Fermische Theorie des β-Zerfalls.

Die erste Frage, die die Theorie des β-Zerfalls beantworten muß, ist die Frage, ob die beim β-Zerfall ausgesandten Elektronen und Neutrinos schon vor dem Zerfall als individuelle Bestandteile des Kerns existieren, oder ob sie beim Zerfallsprozeß etwa wie Lichtquanten erst geschaffen werden. Es gibt viele Gründe gegen die Annahme, daß leichte Teilchen und insbesondere Elektronen im Kern existieren. Erstens würden diese Teilchen wegen ihrer kleinen Masse innerhalb des Kerns ungeheuer hohe kinetische Energie haben, und das ist wegen der verhältnismäßig viel kleineren beobachteten Bindungsenergien der Kerne ziemlich unwahrscheinlich. Zweitens könnte man die kleinen magnetischen Momente der Kerne (etwa 200mal kleiner als das Elektronenmagneton) nur schwer verstehen, wenn die Kerne Elektronen enthalten. Drittens müßte man, um die beiden Arten von β-Zerfall (die z. B. beim *Cu*-Kern sogar gleichzeitig vorkommen) zu verstehen, die Existenz von sowohl positiven wie negativen Elektronen im Kern annehmen, was wegen der großen Vernichtungswahrscheinlichkeit dieser beiden Teilchenarten wohl ausgeschlossen ist. Deshalb scheint es viel vernünftiger, anzunehmen, daß die Elektronen und Neutrinos aus im Kern vorhandener elektrischer Ladung und Energie beim Zerfallsprozeß direkt entstehen, etwa wie ein Lichtquant beim Quantenübergang eines Atoms. Diese Analogie zwischen β-Zerfall und Lichtemission wird auch dadurch gestützt, daß ein β-Teilchen bei einem Zusammenstoß nie gleich vom Kern herausgeworfen wird; genau wie das Lichtquant bei der Emission eines durch Stoß angeregten Atoms braucht das β-Teilchen eines durch Stoß erzeugten aktiven Elementes eine gewisse, für seine Energie charakteristische Zeit (Zerfallsperiode), um den Kern zu verlassen. Nach dem oben skizzierten Standpunkt kann man also ebensowenig die Elektronen (und Neutrinos) als Bestandteile der Kerne auffassen wie ein angeregtes Wasserstoffatom als Dreikörpersystem von Proton, Elektron und Lichtquant beschreiben.

Die quantenmechanische Theorie des β-Zerfalls, die zuerst von Fermi vorgeschlagen wurde, betrachtet demnach die β-Emission analog zur Lichtquantenemission, wobei zwei wichtige Unterschiede zwischen beiden Erscheinungen

berücksichtigt werden, nämlich, daß es sich hier um die gleichzeitige Aussendung von zwei Teilchen handelt und daß das ausstrahlende System seine Ladung ändert. Bei der Lichtausstrahlungstheorie wird die Wahrscheinlichkeit von Quantenübergängen zwischen zwei Zuständen des strahlenden Systems geladener Teilchen durch die Wechselwirkungskräfte zwischen den Ladungen und dem virtuellen elektromagnetischen Feld des entstandenen Lichtquants bestimmt; diese Kräfte sind durch die wohlbekannten Maxwellschen Gleichungen bestimmt. Bei β-Zerfallsprozessen fehlt uns die Kenntnis von analogen Kräften der Wechselwirkung zwischen Anfangs- und Endzuständen der schweren Teilchen (also Neutronen- und Protonenzustand oder umgekehrt) und den virtuellen Feldern des entstandenen Elektrons und Neutrinos. In dieser Hinsicht hat man ein freies Feld für Hypothesen. Diese Kräfte können im allgemeinen von den Koordinaten, inklusive Spinkoordinaten, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen usw. der schweren Teilchen vor und nach der Umwandlung (im Neutronen- und Protonenzustand) und von den analogen Bestimmungsstücken des entstandenen Elektrons und Neutrinos abhängen. In allen bisherigen Formen der β-Zerfallstheorien wird angenommen, daß der Kraftausdruck nur die Koordinaten der schweren Teilchen enthält, obwohl es möglich ist, daß bei der weiteren Entwicklung der Theorie auch andere für die Bewegung charakteristische Größen des Neutrons und Protons eingeführt werden müssen[1]). Da unsere Kräfte Nahewirkungskräfte sein sollen, wird die Wechselwirkung nur vom Verhalten der Wellenfunktionen der leichten Teilchen in dem Gebiet abhängen, wo sich die schweren Teilchen befinden. Schreibt man ψ und φ für die Wellenfunktionen der leichten Teilchen, so wird die Wechselwirkungsenergie nur von $\psi(X)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(X)$ usw. und $\varphi(X)$, $\frac{\partial\psi}{\partial x}(X)$ usw. abhängen, wo X die Koordinaten der schweren Teilchen sind. Als einfachste Hypothese hat Fermi angenommen, daß die Wechselwirkungsenergie einfach den Dichten der das Elektron und das Neutron beschreibenden Wellenfunktionen am Ort der schweren Teilchen proportional ist:

$$W \mathrel{\mathbb{Z}} g\psi(X)\varphi(X)\,, \qquad (1)$$

wo g eine neue universelle Konstante von der Dimension erg cm^3 ist.

Nach den allgemeinen Grundlagen der Störungstheorie ist die Übergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen durch das Quadrat der mittleren Störungsenergie bestimmt gemäß der Formel:

$$dP \mathrel{\mathbb{Z}} C\,|\int g\psi\varphi\Psi\Phi\,d\omega|^2 dE\ ^1)\,, \qquad (2)$$

wo Ψ und Φ die Wellenfunktion der schweren Teilchen vor und nach der Umwandlung sind. Da für gewöhnliche β-Umwandlungen ($E_{\max} \sim$ 1 MV) die Wellenlängen der leichten Teilchen viel größer als die Kerndimensionen sind (wo nur Ψ und Φ von Null verschieden sind), kann man (2) in der folgenden Form schreiben:

$$dP \mathrel{\mathbb{Z}} \frac{1}{\hbar^3}\, g^2 |\int \Psi\Phi\,d\omega|^2 \psi_{r=0}^2 \varphi_{r=0}^2 dE\,. \qquad (3)$$

Das Matrixelement $M = |\int\psi\Phi d\omega|$ wird für erlaubte Übergänge (s. oben) von der Größenordnung Eins sein, und wir sehen, daß die Zerfallskonstante wesentlich durch die Werte von ψ und φ im Kerninneren bestimmt wird. Vernachlässigen wir den Effekt des Coulombfeldes des Kernes auf das ausgestrahlte Elektron (was für leichte künstlich aktive Kerne ohne weiteres getan werden darf), so sind beide Funktionen ψ und φ Kugelwellen, die bekanntlich die folgende, auf den Einheitsstrom normierte Form haben:

$$\psi \mathrel{\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{v_e}}\,\frac{1}{r}\sin\frac{p_e}{\hbar}r\,, \qquad (4)$$

$$\varphi \mathrel{\mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{v_\nu}}\,\frac{1}{r}\sin\frac{p_\nu}{\hbar}r\,. \qquad (4')$$

wo v_e, v_ν, p_e und p_ν die Geschwindigkeiten und Momente des Elektrons und des Neutrinos sind. Für kleine r (Kernradius $\ll$ de Broglieschen Wellenlänge der leichten Teilchen) haben wir

$$\psi_{r\to 0} \mathrel{\mathbb{Z}} \frac{1}{\hbar}\frac{p_e}{\sqrt{v_e}}\,; \qquad \varphi_{r\to 0} \mathrel{\mathbb{Z}} \frac{1}{\hbar}\frac{p_\nu}{\sqrt{v_\nu}} \qquad (5,\ 5')$$

und der Ausdruck (3) wird:

$$dP \mathrel{\mathbb{Z}} \frac{1}{\hbar}\, g^2 M^2 \frac{p_e^2 p_\nu^2}{v_e v_\nu} dE. \qquad (6)$$

Der Faktor $p_e^2 p_\nu^2/v_e v_\nu$ ist entscheidend für die Energieverteilung zwischen Elektron und Neutrino. Wenn die Neutrinomasse μ der Elektronenmasse m gleich wäre, würde die Verteilung symmetrisch sein mit dem Maximum in der Mitte. Das widerspricht der Erfahrung. Außerdem würde man mit dieser Annahme einen falschen Verlauf der Kurve in der Nähe der oberen Energiegrenze bekommen. Wenn nämlich die Elektronenenergie sehr nahe bei $E_{\max}$ liegt, so

[1]) Eine solche Verallgemeinerung wird zur Folge haben, daß z. B. die Zerfallswahrscheinlichkeit des freien Neutrons von seiner Bewegungsart abhängt.

[1]) Der Wert von C hängt von der Normierung ab; wenn die Funktionen Ψ und Φ zum diskreten und ψ und φ zum kontinuierlichen Spektrum gehören, wird ($C \cong \hbar^{-3}$).

kann man p_e und v_e konstant ansetzen; andererseits wird das Neutrino für kleine Energien nichtrelativistisch beschrieben, und man hat $p_\nu = \mu v_\nu$. Man sieht sofort, daß mit solchen Annahmen (6) in der Nähe der oberen Grenze sich wie

$$\frac{p_\nu^2}{v_\nu} = \mu^2 v = \sqrt{2\,\mu^3}\,\sqrt{E_\nu} = \sqrt{2\,\mu^3}\,\sqrt{E_{\max} - E_\nu}$$

verhält, d. h. die Verteilungskurve mündet mit vertikaler Tangente in die obere Grenze ein, aber auch das widerspricht der Erfahrung. Setzen wir $\mu \ll m$, so wird das Maximum nach links verschoben und in der Nähe der oberen Grenze wird die Kurve wie

$$\frac{p_\nu^2}{v_\nu} = \frac{(E_\nu/C)^2}{C} = \frac{1}{C^3} E_\nu^2 = \frac{1}{C^3}(E_{\max} - E_\nu)^2$$

verlaufen, d. h. eine horizontale Tangente haben. Obwohl das schon besser mit den beobachteten β-Spektren übereinstimmt, ist die Übereinstimmung noch sehr schlecht (s. Fig. 3a, b), weil in Wirklichkeit das Maximum noch viel weiter nach links verschoben ist als durch die Annahme $\mu = 0$ erreicht würde.

Die Situation kann wesentlich verbessert werden, wenn man, wie das zuerst von Uhlenbeck und Konopinski vorgeschlagen wurde, die höheren Ableitungen von φ in den Ausdruck (1) einführt. Schreibt man allgemein:

$$W \mathrel{\hat{=}} g_{a,b} \frac{\partial}{\partial x^a}\psi \frac{\partial}{\partial x^b}\varphi\,, \qquad (7)$$

wo $g_{a,b}$ jetzt die Dimensionen erg cm^{3+a+b} hat, so wird die Formel (6):

$$dP \mathrel{\hat{=}} \frac{1}{h^{7+2a+2b}} g_{a,b}^2 M^2 \frac{p_e^{2+2a} p_\nu^{2+2b}}{v_e v_\nu} dE \qquad (8)$$

Man kann einfach sehen, daß größere m das Maximum nach rechts und größere n nach links verschieben. Die Annahme $a = 0$ und $b = 1$ (also $W \mathrel{\hat{=}} g_{01}\,\psi_{\mathrm{grad}\,\varphi}$) gibt die beobachtete Form der β-Spektren mit genügender Annäherung wieder (s. Fig. 3a, b). Man darf aber nicht zu große Werte von a und b nehmen, weil man dann zu einem scharfen Maximum kommt. Wir müssen hier noch bemerken, daß bei Einführung von Ableitungen von φ, wie einfach zu sehen ist, die β-Kurve immer (auch für $\mu = m$) mit horizontaler Tangente gegen die obere Grenze gehen wird ($\sim (E_{\max} - E_e)^{\frac{3}{2}}$ für $\mu = m$ und $\sim (E_{\max} - E_e)^4$ für $\mu = 0$). Die Frage nach der Neutrinomasse kann also nur durch Untersuchungen, wie schnell die Verteilungskurve an der oberen Grenze gegen Null geht, beantwortet werden. Es sieht so aus, als ob auch hier die Annahme einer sehr kleinen Neutrinomasse bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung ergibt. Um die Gesamtwahrscheinlichkeit einer β-Umwandlung (d. h. die Zerfallskonstante λ) zu bestimmen, braucht man nur den Ausdruck (6) oder (8) über das ganze Spektrum zu integrieren. Wir bekommen:

$$\lambda = \int_0^{E_{\max}} P dE \mathrel{\hat{=}} \frac{g_{ab}^2}{h^{7+2a+2b}} M^2 \int \frac{p_e^{2+2a} p_\nu^{2+2b}}{v_e v_\nu} dE. \qquad (9)$$

Für Umwandlungen mit kleinem $E_{\max}$ kann man das Elektron nichtrelativistisch behandeln und $p_e = \sqrt{2\,m\,E_e}\,;\ v_e = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ schreiben. Für energiereichere Umwandlungen müssen die meisten Elektronen im Spektrum relativistisch behandelt werden, wir schreiben also: $p_e = \frac{E}{c}\,;\ v_e = c$. Wegen der verschwindenden Neutrinomasse dürfen wir immer schreiben $p_\nu = \frac{E}{c}$, $v_\nu = c$. Mit diesen Annahmen bekommen wir für $E_{\max} \ll mc^2$:

$$\lambda \mathrel{\hat{=}} g^2 E^{1/2+a+2b} \frac{M^2 m^{3/2+a}}{h^{7+2a+2b} c^{2b+3}}\,, \qquad (10)$$

und für $E_{\max} \gg mc^2$:

$$\lambda \mathrel{\hat{=}} g^2 E^{5+2a+2b} \frac{M^2}{h^{7+2a+2b} c^{6+2a+2b}}\,. \qquad (11)$$

Wie man aus den Sargentschen Kurven (Fig. 4) sehen kann, ändert sich die Zerfallskonstante im Gebiet großer Energien etwa wie $E_{\max}^5$. Das zeigt, daß für die Erklärung der Zerfallskonstante-Energie-Beziehung die ursprüngliche Annahme von Fermi ($a = 0$, $b = 0$) die besten Resultate ergibt. Wir müssen hier aber bemerken, daß monotone Änderungen des Matrixelementes M, das in allen unseren Überlegungen konstant (und ~ 1) angenommen war, unsere Schlüsse in gewissem Sinne noch abändern können.

Wir haben oben die Wirkung der Coulombkraft für leichte β-aktive Kerne vernachlässigt. Für schwerere radioaktive Kerne ist das nicht mehr zulässig: Dort wird die Anziehung des Kerns die Dichte der Elektronen ψ-Funktion im Kerninnern etwas vergrößern. Für die Kerne der radioaktiven Familien erreicht die Vergrößerung etwa den Faktor 5. Man sollte also erwarten, daß für gleiche Energien die Zerfallskonstanten der schweren Kerne etwa 25mal größer sein sollten als für leichte Kerne. Die Fig. 4 zeigt, daß das kaum der Fall sein kann, da die leichten Kerne auf denselben Kurven liegen wie die schweren. Nach Bethe könnte man diese Diskrepanz dadurch verstehen, daß das Matrixelement M, über das wir sowieso nichts wissen, für schwere Kerne

im Durchschnitt 25mal kleiner als für leichte Kerne ist.

Setzen wir in Ausdruck (11) die Zerfallskonstante und Energie bekannter β-aktiver Kerne ein, so können wir den numerischen Wert für die neue Fermische Universalkonstante g bekommen. Da bei verschiedenen Ansätzen g verschiedene Dimensionen hat, ist es bequemer, die Energie in mc^2-Einheiten und die Zeit in $\frac{\hbar}{mc^2}$-Einheiten zu messen und den Vergleich mit der Erfahrung für $E_{max} = \frac{E_{max}}{mc^2} = 1$ durchzuführen.

Für $E = mc^2 = 0{,}5$ MV ist unabhängig von einem besonderen Ansatz $\lambda = G^2 \frac{mc^2}{\hbar}$. Die aus der Sargentschen Kurve entnommene Zerfallskonstante für diese Energie ist:

$$\lambda = 9 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{sec}^{-1} = 10^{-25}\,\frac{mc^2}{\hbar}$$

und wir bekommen

$$G \backsimeq 3 \cdot 10^{-13}\,.$$

Die Konstanten g_{ab}, die in verschiedene Ansätze eingehen, werden jetzt: $g_{ab} = G m c^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{3+a+b}$, also $\sim 10^{-50}$ erg cm^3 für den Fermischen Ansatz, $\sim 10^{-60}$ erg cm^4 für Uhlenbeck-Koponinski usw.

Die außerordentliche Kleinheit der dimensionslosen Konstante G stellt die zentrale Schwierigkeit für das Verständnis der β-Zerfallsprozesse dar und wird im letzten Abschnitt näher besprochen werden.

Wechselwirkungskräfte zwischen schweren Teilchen, ihre magnetischen Momente und mehrfacher Austausch.

Wie schon oben erwähnt, ist es für den Aufbau eines Kernmodells notwendig, starke, auf kleine Abstände wirkende Anziehungskräfte zwischen schweren Teilchen anzunehmen. Iwanenko und Tamm haben gezeigt, daß man derartige Kräfte auf Grund der Fermischen Theorie aus dem Austausch von Elektronen-Neutrinopaaren zwischen schweren Teilchen ableiten kann, ganz analog, wie man bei der Heitler-Londonschen Theorie die Kräfte zwischen neutralen Atomen durch den Austausch von Hüllenelektronen erklärt. Man denkt also an Prozesse, bei denen z. B. ein Elektron-Neutrinopaar von einem Neutron virtuell ausgestrahlt und von einem in der Nähe befindlichen Proton wieder absorbiert wird. Wir haben also zwei Möglichkeiten:

$$n + p \to (p + e^- + \nu) + p \to p + (e^- + \nu + p) \to p + n$$

oder

$$p + n \to (n + e^- + \nu) + n \to n + (e^+ + \nu + n) \to n + p\,.$$

Beide stellen einen Austausch von elektrischer Ladung zwischen zwei schweren Teilchen dar. Fragt man nach der Spinrichtung beider Teilchen vor und nach dem Austausch, so gibt es verschiedene Möglichkeiten, die mit den obenbesprochenen Auswahlregeln für den β-Zerfall in engem Zusammenhang stehen. Die Annahme, daß bei Elektronen-Neutrinoemission das schwere Teilchen seinen Spin beibehält, führt uns zur ersten Form (A) der Auswahlregeln; dabei werden die Spins von zwei schweren Teilchen bei Austausch der Ladung nicht geändert (Fig. 6A). Man kann zeigen, daß diese Annahme,

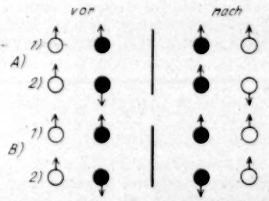

Fig. 6. Umklappen der Spins bei β-Zerfall.

die zuerst von Heisenberg benutzt wurde, zur Anziehung führt, wenn beide Teilchen parallelen Spin haben und zu einer gleich starken Abstoßung im entgegengesetzten Fall. Unsere zweite Annahme (Fig. 6B), bei der der Spin des schweren Teilchens bei Elektronen-Neutrinoausstrahlung umklappt, kann zu einer anderen Art von Kräften führen, durch die der Spin von zwei Teilchen zusammen mit der Ladung vertauscht wird. Solche Kräfte führte zuerst Majorana ein; sie geben Anziehung unabhängig von den Spinrichtungen der zwei schweren Teilchen. Wir betrachten ein Kernmodell, in dem die Neutronen und Protonen auf verschiedene

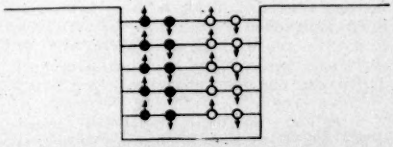

Fig. 7. Verteilung von Neutronen und Protonen auf die Kernniveaus.

Quantenniveaus verteilt sind, wie es in Fig. 7 schematisch dargestellt ist. Auf jedem Niveau befinden sich zwei Neutronen und zwei Protonen

mit entgegengesetzter Spinrichtung[1]). Man sieht sofort, daß ein Austauschprozeß zwischen einem Neutron und einem Proton, die verschiedenen Niveaus angehören, ausgeschlossen ist; sonst würden nach dem Austausch (der die Ladungen vertauscht) in einem Niveau drei Neutronen und in einem anderen drei Protonen sein. Nimmt man die Heisenbergsche Annahme A (der Spin wird nicht vertauscht) an, so kann z. B. das Neutron a vom ersten Niveau nur mit dem Proton c (das dieselbe Spinrichtung hat) in Austausch treten, sonst würde man nach dem Austausch im ersten Niveau zwei Neutronen (und auch zwei Protonen) mit parallelem Spin vorfinden, was nach dem Pauli-Prinzip nicht erlaubt ist. Wir sehen also, daß nach dem Heisenbergschen Austauschtypus ein Proton nur mit einem Neutron in Austausch treten kann; man sagt, daß die Kräfte die Valenz Eins besitzen. Diese Möglichkeit befriedigt aber nicht, weil es uns schließlich veranlassen würde, daß das Deuteron (Neutron + Proton) einer abgesättigten Schale entspricht, was aber wegen der kleinen Bindungsenergie dieses Kerns nicht plausibel erscheint. Lassen wir mit Majorana die andere Möglichkeit B zu, so wird ein Austauschprozeß zwischen einem Proton und zwei Neutronen im selben Quantenzustand (oder umgekehrt) erlaubt, und unsere Kräfte würden die Valenz Zwei haben. Diese Annahme ist viel wahrscheinlicher, da es gut bekannt ist, daß das α-Teilchen, welches in diesem Fall eine abgesättigte Schale darstellen würde, in der Tat eine sehr starke Bindungsenergie besitzt. Die Größe dieser Austauschkräfte kann man durch Anwendung der Störungstheorie ausrechnen; wir werden sie hier durch einfache Dimensionsbetrachtungen ableiten. Das Potential von Kräften, die aus dem Wechselwirkungsansatz (1) oder allgemeiner aus (7) folgen, muß dem Quadrat der Fermischen Konstante g proportional sein[2]). Von der elektrischen Elementarladung e sollte es nicht abhängen, da die Ladung gar nicht im Wechselwirkungsaustausch vorkommt. Auch die Elektronenmasse wird nicht wichtig sein, weil bei den für den Austausch maßgebenden Elektronengeschwindigkeiten (Wellenlänge $\sim 10^{-13}$ cm, d. h. Energien $\sim$ 100 MV.) die Restenergie mc^2 vernachlässigt werden kann. Im Potentialausdruck dürfen also nur die Konstanten c und $\hbar$ vorkommen, und der Abstand zwischen zwei schweren Teilchen. Wir schreiben also:

$$U \backsimeq g_{ab}^2 c^x \hbar^y r^z , \tag{12}$$

wo x, y, z unbekannte Zahlen sind. Drücken wir U, c, $\hbar$, r in C-, G-, S-Einheiten aus und schreiben nach Gleichung (7):

$$|g| = |\mathrm{erg\,cm^{3+n+m}}| = MT^{-2}L^{5+n+m} ,$$

so gibt die Dimensionsbedingung $x = y = -1$; $z = 5 + 2n + 2m$. Also wird die Wechselwirkungsenergie:

$$\left.\begin{aligned} U &= \alpha \frac{g_{ab}^2}{\hbar c} \frac{1}{r^{5+2m+2n}} \\ &= \alpha G^2 m c^2 \left(\frac{\hbar/mc}{r}\right)^{5+2a+2b} , \end{aligned}\right| \tag{12'}$$

wo α ein numerischer Koeffizient von der Größenordnung Eins ist. Für $r \to 0$ werden die durch Ausdruck (12′) gegebenen Kräfte unendlich groß; das hat zur Folge, daß ein mit diesen Kräften aufgebautes Kernmodell unstabil wird. Deshalb ist es notwendig, anzunehmen, daß auf sehr kleine Abstände (etwa kleiner als Teilchendimensionen) der Ausdruck (12′) nicht mehr richtig sein kann, und daß das Potential zu einem endlichen Wert bei $r = 0$ konvergieren wird. Formal kann dies erreicht werden, wenn man die Entstehung von leichten Teilchen, deren de Broglieche Wellenlänge kleiner als eine gewisse Länge l_0 ist, verbietet (Abschneidungsmethode) oder, indem man mindestens die zugehörige Bildungswahrscheinlichkeit genügend verkleinert (das kann nach v. Weizsäcker z. B. durch Einführung eines Faktors $e^{-\frac{A_0}{l_0}}$ erreicht werden). Schneiden wir beim Abstand $3 \cdot 10^{-13}$ cm ab, so wird dieser Ausdruck nach dem Fermischen Ansatz den Wert

$$U \backsimeq 10^{-21}\ \mathrm{erg} \backsimeq 10^{-9}\ \mathrm{erg} = 10^{-5}\ \mathrm{e.\,V.}$$

erhalten. Um den für den Kernbau notwendigen Wert von etwa 10^{+7} e. V. zu bekommen, müßte man noch drei Schritte weiter gehen, d. h. im Ausdruck (7) insgesamt vier Ableitungen einführen. Wir haben aber schon oben gesehen, daß eine solche Annahme die Übereinstimmung für die Formen der β-Spektra und besonders für die Sargentsche Gesetzmäßigkeit ganz verderben würde.

Eine andere Frage, für die die Anwendung der Fermischen Theorie nützlich sein kann, ist die Frage nach der Entstehung der magnetischen Momente schwerer Elementarteilchen. Die Momente sind nach neuen Messungen etwa 2.9

1) In Fig. 7 sind die Coulombkräfte vernachlässigt. Zieht man die elektrische Abstoßung zwischen den Protonen in Betracht, so werden die Protonenniveaus nach oben verschoben, und man muß bei den weiteren Betrachtungen die Neutronen- und Protonenniveaus mit gleichen Quantenzahlen untereinander vergleichen.

2) Das kommt daher, daß der Austausch ein Prozeß zweiter Ordnung ist.

Kernmagnetonen für das Proton und 2.0 Kernmagnetonen für das Neutron; nach der Diracschen Theorie sollte man erwarten, daß diese Momente 1 und 0 wären. Nach Wick könnte man die additiven magnetischen Momente schwerer Teilchen dadurch erklären, daß die Elektronen-Neutrinopaare virtuell erzeugt, nach kurzer Zeit aber wieder reabsorbiert werden. Im virtuellen Zustand wird das Elektron ein magnetisches Moment von etwa einem Bohrschen Magneten (genauer ein Drittel davon) haben und im Zeitmittel sollte nur etwa ein Tausendstel davon als additives magnetisches Moment des schweren Teilchens auftreten. Wir bemerken hier, daß man beim Heisenbergschen Typus der Wechselwirkung, wobei das Elektron mit gleicher Wahrscheinlichkeit mit nach oben und nach unten gerichtetem Spin entsteht, im Mittelwert den Wert Null finden wird; nach dem Majoranaschen und dem gemischten Typus kann man aber einen endlichen Mittelwert erhalten. Die Größe der magnetischen Momente können wir, wie oben für die Austauschkräfte, durch Dimensionsbetrachtungen abschätzen. Wir haben nämlich:

$$\mu \backsimeq e g^2 \hbar^x c^y l_0^z , \tag{13}$$

wo l_0 der oben besprochene Abstand ist, bei dem man abschneiden soll. (Nehmen wir $l_0 = 0$ an, so wird das magnetische Moment des Teilchens ebenso wie seine Ruhmasse unendlich groß.) Nach Dimensionsbetrachtungen bekommen wir:

$$\left.\begin{aligned} \mu &= \beta \frac{e g^2}{\hbar^2 c^2 l_0^{3+2a+2b}} \\ &= \beta \frac{e \hbar G^2}{mc} \left(\frac{\hbar / mc}{l_0} \right)^{3+2a+2b} , \end{aligned}\right| \tag{13'}$$

wo β wieder ein numerischer Koeffizient der Größenordnung Eins ist. Für $l_0 = 1 \cdot 10^{-13}$ cm und $a + b = 0$ und $a + b = 1$ bekommt man $\mu \backsimeq 10^{-19} \mu_e$ und $10^{-15} \mu_e$[1]). Um die richtige Größenordnung $\left(\frac{1}{1836}\right)$ zu bekommen, müßte man genau wie für die Austauschkräfte $a + b = 4$ setzen, was, wie wir bereits oben erwähnten, sehr unbefriedigend ist.

Die obigen Überlegungen über Elektronen-Neutrinopaaraustausch führen nur dazu, die Kräfte zwischen Neutron und Proton zu verstehen. Die Experimente von Tuve, Hafstad und Heydenberg zeigen aber, daß es auch zwischen zwei Protonen starke Anziehungskräfte gibt, die nach Rechnungen von Breit, Condon und Present ebenso stark sind wie die zwischen Neutron und Proton. Um die relative Anzahl von Neutronen und Protonen in schweren Kernen zu verstehen, müßte man auch annehmen, daß es auch zwischen zwei Neutronen starke Anziehung gibt. Um die Existenz solcher Kräfte zwischen gleichen Teilchen zu verstehen, muß man auch den doppelten Austausch vom Typus: $p + p^1 \to (n + e^+ + \nu) + (n^1 + e^{+1} + \nu^1) \to (n + e^{+1} + \nu^1) + (n^1 + e^+ + \nu) = p^1 + p$ (beide Teilchen emittieren ein Paar, das von dem anderen absorbiert wird), oder: $p + p^1 \to (p^1 + e^+ + \nu + e^- + \nu) + p^1 \to p + (e^+ + \nu + e^- + \nu + p^1) \to p + p^1$ (ein Teilchen emittiert gleichzeitig zwei Paare, die vom anderen absorbiert werden), annehmen. Die Wahrscheinlichkeit für solche Prozesse zweiter Ordnung müßte ebenso groß wie für Prozesse erster Ordnung sein. Wir können die relativen Wahrscheinlichkeiten von Prozessen verschiedener Ordnungen auf Grund des oben angegebenen Formalismus der Fermischen Theorie abschätzen. Wir haben gesehen, daß die mittlere Zeit für eine Elektronen-Neutrinopaaremission durch den Ausdruck:

$$T \backsimeq \frac{\hbar}{mc^2} G^2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^{-(5+2a+2b)} \tag{14}$$

gegeben ist, wo E die Umwandlungsenergie bezeichnet. Die zwei β-Prozesse können als „gleichzeitig" betrachtet werden, wenn sie beide innerhalb eines Zeitintervalls von $\frac{\hbar}{E}$ stattfinden (da innerhalb dieser Zeit ein Elektron, daß sich mit der maximalen Geschwindigkeit c bewegt, innerhalb der Unbestimmtheit $\frac{\hbar c}{E}$ seiner Lage bleibt). Es folgt also aus Gleichung (14), daß doppelte β-Emission mit großer Wahrscheinlichkeit nur dann stattfinden kann, wenn:

$$\left.\begin{aligned} & G^2 \left(\frac{E}{mc^2} \right)^{-(4+2a+2b)} \sim 1 \\ \text{oder} \quad & \frac{E}{mc^2} \sim G^{\frac{1}{2+a+b}} . \end{aligned}\right| \tag{15}$$

Ist Λ die de Broglische Wellenlänge des ausgestrahlten Elektrons, so ist $\Lambda = \frac{2\pi\hbar}{P} = \frac{2\pi\hbar c}{E}$ und unsere Bedingung wird:

$$\Lambda \sim \frac{\hbar}{mc} \cdot G^{\frac{1}{2+a+b}} = L_{a,b} . \tag{16}$$

Die Größe auf der rechten Seite von Gleichung (16) ist eine für die Fermische Theorie charakteristische Länge. Ihre Bedeutung für mehrfache Prozesse bemerkte zuerst Heisenberg; er wandte sie zur Erklärung der Showererscheinung bei der kosmischen Strahlung an.

[1]) $\mu_e \backsimeq \frac{e\hbar}{mc}$ ist ein Bohrsches Magneton.

Die Gleichung besagt, daß mehrfache Ausstrahlungs- und Austauschprozesse dann wahrscheinlich werden, wenn die Wellenlänge des leichten Teilchens von der Größenordnung dieser „Fermischen Länge" ist. Mit $G = 3 \cdot 10^{-13}$ bekommen wir $L_{00} \cong 2 \cdot 10^{-17}$ cm; $L_{01} = L_{10} \cong \frac{1}{2} 10^{-15}$ cm, und im allgemeinen $L_{a,b} = 3 \cdot 10^{-11} G^{2+a+b}$. Da die für den Austausch maßgebende Wellenlänge von der Größenordnung der Reichweite der Kernkräfte, d. h. $3 \cdot 10^{-13}$ cm, ist, folgt aus unseren Überlegungen, daß mehrfacher Austausch nur dann mit genügender Wahrscheinlichkeit auf Kernabstände auftritt, wenn der fundamentale Ansatz der β-Zerfallstheorie insgesamt vier Ableitungen enthält (ebenso viele wie für eine Erklärung der Neutrón-Protonkräfte und der magnetischen Momente notwendig war). Die oben gegebene Deutung von Austauschkräften zwischen gleichen Teilchen hat aber einen wesentlichen Nachteil. Es läßt sich nämlich zeigen, daß die Austauschkräfte, die von einem doppelten Austausch herrühren, gar nicht Anziehungs-, sondern Abstoßungskräfte sind. Es scheint so, als ob im Rahmen des Elektronen-Neutrinoaustauschbildes kein Ausweg aus dieser Schwierigkeit möglich wäre.

Mögliche Verallgemeinerung der Theorie.

Bisher haben wir nur solche Umwandlungen schwerer Teilchen betrachtet, bei denen ein Elektronen-Neutrinopaar emittiert wird. Es gibt aber noch zwei andere Typen der Emission, die mit den üblichen Erhaltungssätzen verträglich sind:

1. Emission eines Elektronenpaares (z. B. $n \to n + e^+ + e^-$) und
2. Emission eines Neutrinopaares (z. B. $n \to n + \nu + \nu$).

Die mögliche Bedeutung dieser neuen Umwandlungsprozesse für Fragen der Kernphysik wurde unabhängig von Wentzel und von Gamow und Teller erwähnt, und zwar auf ziemlich verschiedene Weise. Nach Wentzel ist die Wahrscheinlichkeit der neuen Prozesse von derselben Größenordnung wie die Wahrscheinlichkeit des gewöhnlichen β-Zerfalls; nach Gamow und Teller ist die Elektronenpaaremission viel wahrscheinlicher und die Neutrinopaaremission viel unwahrscheinlicher als β-Emission. Wir werden im folgenden auf die zweite Betrachtungsweise näher eingehen, da diese den Vorteil hat, mehrere bisherige Schwierigkeiten der Kernphysik zu beseitigen.

Wir werden annehmen, daß die Wahrscheinlichkeiten der drei Emissionsprozesse (e^+e^-), $(e^\pm, \nu)$ und (ν, ν) gewissermaßen eine geometrische Reihe bilden; nimmt man für den gewöhnlichen β-Zerfall die Wechselwirkungsenergie in der im letzten Abschnitt diskutierten Form an, so kann man für die drei Prozesse hypothetisch schreiben:

$$(e^+, e^-) \qquad 1 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{3+2a} \frac{\partial^a \psi}{\partial x^a} \frac{\partial^a \psi'}{\partial x^a}, \qquad (17)$$

$$(e^\pm, \nu) \qquad G mc^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{3+a+b} \frac{\partial^a \psi}{\partial x^a} \frac{\partial^b \varphi}{\partial x^b}, \qquad (17')$$

$$(\nu, \nu') \qquad G^2 mc^2 \left(\frac{\hbar}{mc}\right)^{3+2b} \frac{\partial^b \varphi}{\partial x^b} \frac{\partial^b \varphi'}{\partial x^b}, \qquad (17'')$$

wo die Striche bei den Wellenfunktionen die zwei Einzelteilchen der emittierten Paare unterscheiden. Da, wie wir oben gesehen haben, die dimensionslose Konstante G etwa $3 \cdot 10^{-13}$ ist, wird die Wahrscheinlichkeit einer Elektronenpaaremission etwa 10^{15} mal größer als die Wahrscheinlichkeit einer Elektronen-Neutrinoemission sein. Doch hat dieser Prozeß keine Beziehung zum gewöhnlichen β-Zerfall, weil dieser Prozeß nicht mit einer Ladungsänderung schwerer Teilchen verknüpft ist. Dagegen wird dieser Prozeß außerordentlich wichtig bei der virtuellen Entstehung von Paaren in der Nähe eines schweren Teilchens, die die magnetischen Momente verursacht und bei den Austauschphänomenen, die die Kräfte zwischen schweren Teilchen ergeben. Wegen seiner großen Wahrscheinlichkeit wird dieser Prozeß viel größere Werte als die Fermische Theorie ergeben. Nehmen wir z. B. an, daß die richtige Wahl von a und b nach Uhlenbeck und Konopinski getroffen worden ist, also $a = 0$, $b = 1$. Der Ansatz [Gleichung (17)] mit $a = 0$ wird dann für die magnetischen Momente und Wechselwirkungskräfte Werte geben, die etwa um den Faktor $G^{-2} \sim 10^{15}$ größer sind als die, die man mit dem Ansatz $G \cdot \psi \cdot \varphi$ bekommt. Da letzterer etwa um diesen Faktor zu klein war, sieht man, daß unsere neuen Annahmen zur richtigen Größenordnung für die magnetischen Momente und die Wechselwirkungskräfte führen. Wir müssen hier noch bemerken, daß dieser neue Gesichtspunkt nicht dazu zwingt, die Kräfte zwischen gleichen Teilchen als Prozesse zweiter Ordnung zu betrachten; in der Tat kann der Elektronenpaaraustausch ebensogut zwischen zwei Protonen oder Neutronen wie zwischen einem Proton und einem Neutron stattfinden.

$$p + p' \to (p + e^+ + e^-) + p' \to p + (e^+ + e^- + p') \to p + p'.$$

Das könnte eine evtl. Erklärung der experimentell beobachteten Gleichheit der Kräfte zwischen allen schweren Teilchen geben; diese Kräfte können nur von der relativen Spinorientierung der Teilchen abhängen. Die Kräfte, die durch

den Austausch von Elektronenpaaren entstehen, werden aber die oben betrachteten Valenzeigenschaften der Fermischen Austauschkräfte nicht haben; in der Tat haben wir ja früher gesehen, daß die Valenzabsättigung speziell durch den Austausch von Ladungen verursacht wird, der in unserem Fall nicht existiert. Auf den ersten Blick scheint dieses Resultat (das aber auch in der alten Fermischen Theorie durch den „Schaueraustausch" eingeführt war) zu großen Schwierigkeiten zu führen: wenn jedes Teilchen mit jedem anderen in Wechselwirkung treten kann, muß die gesamte Energie des Kerns dem Quadrat der Teilchenzahl proportional sein, was mit der Erfahrung in Widerspruch steht. Teller und Cretchfield haben aber darauf hingewiesen, daß man diese Schwierigkeiten beseitigen kann, wenn man eine gewisse „Geburtenkontrolle" für die Elektronenpaare einführt und die Aussendung von leichten Teilchen mit viel zu kurzer Wellenlänge verbietet; in der Tat zeigt sich, daß in diesem Fall die potentielle Energie linear mit der Teilchenzahl ansteigen sollte.

Wir wollen nun die Prozesse betrachten, bei denen die neueingeführte Aussendung von Elektronenpaaren sich experimentell äußern kann; das geschieht nämlich in allen den Fällen, wo ein angeregter Kern vorliegt, dessen Anregungsenergie E größer als $2\,mc^2$ ist. In der Tat kann man in diesem Fall statt einer gewöhnlichen γ-Ausstrahlung einen Quantenübergang erwarten, bei dem ein Elektronenpaar emittiert wird, und zwar mit einer Wahrscheinlichkeit, die durch die Wechselwirkungsenergie [Gleichung (17)] bestimmt ist. Die Wahrscheinlichkeit einer solchen Paaremission sollte etwa $G^{-2} \sim 10^{15}$-mal größer sein als die Wahrscheinlichkeit einer β-Umwandlung mit derselben Energie. Für eine Zerfallsenergie von 0,5 MV. ist z. B. die β-Zerfallskonstante $10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1}$, also muß die Paaremissionswahrscheinlichkeit für Kernanregung von 1,5 MV. ($= 2\,mc^2 + 0{,}5$ MV.) etwa von der Größenordnung

$$10^{+15} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1} = 10^{+11}\,\mathrm{sec}^{-1}$$

sein. Die Wahrscheinlichkeit der γ-Quantenemission kann nach Delbrück und Gamow durch Vergleich mit der Wahrscheinlichkeit weitreichender α-Strahlen, direkt bestimmt werden und ist für die in Frage kommenden Energien von der Größenordnung $10^{+13}\,\mathrm{sec}^{-1}$. Also sollte man erwarten, daß für die radioaktiven Elemente etwa 1 Proz. der Übergänge als Elektronenpaare in Erscheinung treten.

Es sei hier aber darauf hingewiesen, daß die Paaremission bei angeregten Kernen auch auf Grund von Diracs Löchertheorie zu erwarten ist (als innere Umwandlung des γ-Strahls), und daß nach Rechnungen von Oppenheimer und Nedelskiy der innere Umwandlungskoeffizient von γ-Strahlen in der Nähe eines ausstrahlenden Kerns auch etwa 1 Proz. ist. Es ist sehr bemerkenswert, daß man von zwei ganz verschiedenen Richtungen her zum selben Prozeß kommt, dessen Existenz durch die Experimente von Alichanow, Alichanian und Kosodoew wirklich nachgeprüft wurde. Man muß hier aber bemerken, daß, obwohl unsere Theorie in diesem Spezialfall dieselben Resultate wie die Diracsche Löchertheorie gibt, doch die neue Beschreibungsweise im allgemeinen mit der Diracs nicht äquivalent ist. Versucht man etwa, die gewöhnliche Paaremission durch die auf einen Kern fallende Strahlung nach dem neuen Gesichtspunkt zu beschreiben, so bekommt man viel zu kleine Wirkungsquerschnitte heraus, da die durch Gleichung (17) beschriebene Wechselwirkung nur in einem kleinen Gebiet innerhalb des Kernradius wirkt, während die Diracsche Paarbildung im ganzen den Kern umgebenden Coulombfeld verläuft. Andererseits enthält die Diracsche Theorie keine Terme, welche die für den Kernbau wichtigen Paaraustauschphänomene zwischen zwei schweren Elementarteilchen beschreiben können. In dieser Hinsicht erscheinen die beiden Beschreibungsweisen gewissermaßen komplementär; die eine ist für die Paarerzeugung innerhalb kleiner Gebiete (Kernradius), die andere in größeren Gebieten (Atomradius) anwendbar, im oben besprochenen Zwischengebiet, wo die inneren Kernprozesse die Aussendung von verhältnismäßig langsamen Elektronenpaaren verursachen, überlagern sich die beiden Beschreibungen. Wir können hoffen, daß die weitere Entwicklung der Theorie uns erlauben wird, eine Formulierung der Paarerzeugungsphänomene auszuarbeiten, welche die beiden obenbesprochenen Gesichtspunkte auf eine natürliche Weise vereinigen wird.

Zum Schluß möchten wir die Emission eines Neutrinopaares betrachten. Seine Wahrscheinlichkeit wird durch die Wechselwirkungsenergie (17″) beschrieben. Man sieht sofort, daß diese Emission sehr unwahrscheinlich wird: für die Energie 0,5 MV. wird z. B. die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit von der Größenordnung $10^{-15} \cdot 10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1} = 10^{-19}\,\mathrm{sec}^{-1}$ sein. Wegen dieser kleinen Wahrscheinlichkeit und der Tatsache, daß die Neutrinopaare eigentlich nur als Transportmittel für Energie betrachtet werden können, liegt der Gedanke nahe, diese Ausstrahlung mit der Ausstrahlung von Gravitationsquanten in Zusammenhang zu bringen, und zwar vielleicht in einem analogen Zusammenhang, wie er zwischen Elektronenpaaremission und Lichtemission besteht. Da die Quantentheorie der

Elementarprozesse im Gravitationsfeld sehr wenig entwickelt ist, ist die genaue Verfolgung dieses Zusammenhanges recht schwierig. Wir wollen hier nur die Frage berühren, in welcher Beziehung der hypothetische Neutrinocharakter des Gravitationsfeldes mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz stehen könnte. Man könnte natürlich denken, daß die Newtonschen Kräfte zwischen zwei schweren Elementarteilchen nichts anderes sind als die elementaren Austauschkräfte, die aus Gleichung (17″) abgeleitet werden können; es erscheint aber recht schwer, diesen Gedanken durchzuführen, weil solche Austausch-Kräfte sehr schnell mit dem Abstand abnehmen werden. Eine mögliche Antwort könnten vielleicht alte Überlegungen von Heitler, Nordheim und Teller geben. Diese Autoren haben erwähnt, daß es vielleicht überhaupt keinen Sinn hat, von Gravitationskräften zwischen zwei Elementarteilchen zu reden. In der Tat muß man, um solche Kräfte messen zu können, die Ungenauigkeitsrelationen befriedigen. Hat man zwei Neutronen oder Protonen (mit der Masse $M \sim 10^{-24}\,gr$) im Abstand r, so muß die durch die Gravitationskraft während des Meßzeitintervalls Δt verursachte Momentänderung größer als die Ungenauigkeit des Moments sein:

$$\frac{KM^2}{r^2}\Delta t > \Delta p > \frac{\hbar}{\Delta r} > \frac{\hbar}{r}. \qquad (18)$$

Andererseits soll die Verschiebung der Teilchen während der Meßzeit klein sein verglichen mit dem Teilchenabstand:

$$\frac{1}{2}\frac{KM}{r^2}(\Delta t)^2 < r. \qquad (19)$$

Aus den beiden Gleichungen (18) und (19) folgt:

$$r > \frac{\hbar^2}{KM^3} \sim \frac{(10^{-27})^2}{10^{-8}(10^{-24})^3} \sim 10^{+26}\,\mathrm{cm}. \qquad (20)$$

Wollte man also die Newtonschen Kräfte zwischen zwei elementaren schweren Teilchen messen können, so müßten diese Teilchen etwa einen Weltradius voneinander entfernt sein. Diese Überlegungen machen es wahrscheinlich, daß man die Newtonschen Kräfte gar nicht als elementare Erscheinung wird betrachten können; deshalb haben sie keinen direkten Zusammenhang mit unseren Überlegungen, die sich hauptsächlich mit den Eigenschaften von Elementarteilchen beschäftigen. Um die Gravitationskräfte zwischen schwereren Körpern zu erhalten, müßte man wahrscheinlich gewisse noch unbekannte statistische Betrachtungen anwenden, die mit der Struktur des Weltalls eng verknüpft sein dürften.

Washington D. C., George Washington University.

(Eingegangen 21. Juni 1937.)

BESPRECHUNGEN.

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten.

Grete Hermann, E. May, Th. Vogel, Die Bedeutung der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis. Drei mit dem Richard-Avenarius-Preis ausgezeichnete Arbeiten. 210 S. Leipzig 1937. S. Hirzel. Kart. RM 6.50.

Die Sächsische Akademie der Wissenschaften hatte im Jahre 1934 die folgende Preisaufgabe gestellt: „Welche Konsequenzen haben die Quantentheorie und die Feldtheorie der modernen Physik für die Theorie der Erkenntnis?" Von den siebzehn eingegangenen Arbeiten wurden drei mit einem Preis ausgezeichnet und in dem vorliegenden Sammelband veröffentlicht.

Die drei Arbeiten gehen von sehr verschiedenen philosophischen Standpunkten aus. Eine Gemeinsamkeit der Lage, in der ihre Verfasser sich befinden, ist aber durch das historische Faktum gegeben, daß die Erkenntnisse der neuen Physik bisher vorwiegend von Vertretern des radikalen Positivismus als Bestätigung ihrer philosophischen Vermutungen in Anspruch genommen worden sind. Das Gefühl, daß damit den Tatsachen Gewalt angetan werde, ist weit verbreitet; und man kann es wohl als gemeinsame Tendenz der drei Arbeiten bezeichnen, den Ort im Gesamtsystem unserer Erkenntnis anzugeben, an dem die vom radikalen Positivismus geleugneten Wahrheiten Platz finden und notwendig sind. Wo dieser Ort liegt und wie sich von ihm aus gesehen die neue Physik ausnimmt, darüber besteht freilich zwischen den Verfassern keine Einigkeit.

Der Aufsatz von G. Hermann untersucht speziell die Rolle des apriorischen Elements in den neuen Theorien. Er knüpft an die ältere Arbeit der Verfasserin: „Die naturphilosophischen Grundlagen der Quantenmechanik" an (vgl. diese Zeitschrift **37**, 527, 1936); hier wird auch die Relativitätstheorie betrachtet. Das Ergebnis kann vielleicht so zusammengefaßt werden: Die klassische Mechanik verwendet die Vorstellungen des euklidischen Raumes und der absoluten Zeit, den Substanzbegriff und das Kausalgesetz in einem geschlossenen Bild von der Natur. Die neuen Theorien verzichten auf die eindeutige Abbildbarkeit des gesamten Naturzusammenhangs auf ein Begriffsschema, das im Rahmen dieser Vorstellungen bleibt. Dagegen wird auch in ihnen jede einzelne Erfahrung mit Hilfe dieser Vorstellungen gewonnen und ausgesprochen. Man erkennt die Verwandtschaft dieser Ergebnisse mit Bohrs für die Deutung der Quantenmechanik grundlegender Feststellung, daß man das Ergebnis eines Experiments nur unter Verwendung der Begriffe der klassischen Physik mitteilen kann.

G. Hermann fordert anschließend, daß bei der weiteren Prüfung der erkenntnistheoretischen Lage vor allem Kants Ansätze zu Rate gezogen werden. Es sei auf ihren weiter ausgearbeiteten Versuch in dieser Richtung in den Abhandlungen der Friesschen Schule (Neue Folge Bd. VI, 3. und 4. Heft, Berlin 1937) hingewiesen.

Die beiden anderen Verfasser versuchen, selbst eine allgemeine philosophische Haltung zu formulieren, die der neuen Lage angemessen ist. Sie bezahlen für das höher gesteckte Ziel damit, daß sie die neue Physik eigentlich nicht für die Erkenntnislehre fruchtbar machen, sondern in ein mehr oder weniger fertiges Schema einordnen. Vor allem gilt dies von der ausführlichen Abhandlung von May, die sich sogar bewußt dieses Ziel setzt. May ist der Ansicht, daß die moderne Physik keine Konsequenzen für die wahren Probleme der Erkenntnistheorie habe, da sie sich „nur" mit der möglichst zweckmäßigen mathematischen Beschreibung gewisser Erfahrungen beschäftige. Seine erkenntnistheoretische Haltung ist wohl vor allem an Driesch orientiert. Seine Kritik der empiristischen Auffassung von der Erkenntnis trifft gewiß deren schwache Punkte. Jedoch wird den Physiker ein mehrfach auftretender erregter Ton in dieser Kritik stutzig machen, den man in einer physikalischen Abhandlung vielleicht als Zeichen eines Zweifels des Verfassers an der Schlagkraft seiner eigenen Argumente ansehen würde. „Er wiederholte nicht so heftig Wort und Lehre, wenn es ganz just mit dieser Sache wäre." Freilich legt die Ausdrucksweise einiger seiner positivistischen Gegner die Vermutung nahe, diese Art der Erörterung sei weniger dem Verfasser als dem Thema eigentümlich.

Der Aufsatz von Vogel schließt sich im wesentlichen an die Positivisten selbst, vor allem an Wittgenstein an. Mit ihnen nennt er „Wissenschaft" nur das kalkülmäßig formalisierbare Wissen, weist aber auf die bei jedem Kalkül bestehende Notwendigkeit von nicht formalisierten „Erläuterungssätzen" hin, welche erst sagen, was für einen Sinn die Symbole des Kalküls in der Wirklichkeit haben sollen. Damit gewinnt er Raum, um alle Angriffe der Positivisten auf „Weltanschauung" abzuweisen. In der Untersuchung der neuen Physik selbst folgt er dann im wesentlichen den positivistischen Gedankengängen, denen ja in dieser Hinsicht kaum Unrichtigkeit, sondern nur Unvollständigkeit vorgeworfen werden kann. So sind im Gegensatz zu G. Hermann in der Deutung der Physik selbst sowohl May wie Vogel Positivisten, nur mit verschiedener philosophischer Bewertung dieser Tatsache.

Versprechen diese Ansätze nun positive Ergebnisse für die Zukunft? Die neue Physik wird gewiß nicht zu einer Einigung in den alten Streitfragen der Philosophen führen. Aber so wie schon mehrmals aus philosophischen Diskussionen schließlich eine neue Wissenschaft hervorging, kann vielleicht in absehbarer Zeit eine wissenschaftliche Erkenntnistheorie der exakten Naturwissenschaft entstehen. Sie müßte die von den Positivisten angestrebte „Wissenschaftslogik" umfassen und außerdem die Art und Weise erforschen, wie sich der Formalismus auf die Wirklichkeit bezieht und wie überhaupt „Erfahrung" zustandekommt, etwa in Fortführung der Ansätze von G. Hermann. Der Philosophie würde es andererseits durch die Ausscheidung dieser Probleme aus ihrem engeren Kreis gewiß erleichtert, die ihr verbleibenden tieferen Fragen von neuem klar zu stellen. C. F. v. Weizsäcker.

W. Bruhns, Kristallographie. Neubearbeitung von P. Ramdohr, 3. Aufl. Bd. 210 der Sammlung Göschen. 8°. 109 S. Mit 192 Fig. Berlin und Leipzig 1937. Walter de Gruyter & Co. RM 1.62.

Das Bändchen enthält: 1. Einen allgemeinen Teil (S. 6–27) mit Bemerkungen über den Kristallbegriff, Symmetrie usw.; 2. Beschreibung der Kristallformen (S. 28–64); 3. Feinbau der Kristalle (S. 69–75); 4. Polymorphie (S. 75–76); 5. Physikalische Eigenschaften wie Kohäsion, Optik, thermische, magnetische und elektrische Eigenschaften (S. 76–106).

Es dient sehr gut zur Einführung in die kristallographische Begriffswelt, wenngleich nach Ansicht des Referenten manche grundlegende Fragen des allgemeinen Teils, eventuell auf Kosten des zweiten Teils, hätten ausführlicher behandelt werden können. Es interessieren im allgemeinen heute wohl mehr allgemeine Gesichtspunkte, wie z. B. Zonenbeziehungen und plausible Ableitung der 32 Kristallklassen (nicht nur Mitteilung der Tatsachen), als eine sehr ins einzelne gehende Beschreibung der Kristallformen (z. B. daß der Würfel acht Ecken hat usw.). Die Abbildungen entsprechen nicht immer den auf S. 19 gestellten Anforderungen. Die Abbildungen der Gittertypen werden vom Referenten nicht als sehr übersichtlich empfunden (im Falle des Perowskites liegt auch eine Verwechslung der *Ca*- und *Ti*-Lagen vor).

Es bleibt natürlich schwierig, auf so engem Raum, den die Göschen-Bändchen zur Verfügung stellen, eine allen Einstellungen gerecht werdende geeignete Auswahl und Ausführlichkeit der Behandlung des Stoffes zu treffen. Man bedauert in dem Zusammenhang, daß auf 106 Seiten Text 19 Seiten Reklame — auf denen viel schönes Andere hätte gebracht werden können — entfallen.

F. Laves.

W. Nikitin, Die Fedorow-Methode. Gr.-8°. IV u. 109 S. Mit 41 Fig. u. 7 Tafeln. Berlin 1936. Gebr. Borntraeger. Geh. RM 12.40.

Die Fedorow-Methode, von ihrem Erfinder als Universaldrehtisch- oder Theodolitmethode bezeichnet, ermöglicht es, durch verschiedene aufeinander senkrecht stehende Drehachsen Mineralkörner unter dem Mikroskop derart in jede eindeutig festlegbare Lage zu bringen, daß viele optische Eigenschaften bequem und mit erheblicher Genauigkeit bestimmt werden können. Hauptanwendungsgebiete sind die Bestimmung von Brechung, Doppelbrechung, Achsenwinkel, relative Lage von optischen zu geometrischen Achsen an beliebig (z. B. in Dünnschliffen oder sonstigen Präparaten) orientierten Mineralkörnern. Auch die relative Verwachsung verschiedener Körner läßt sich leicht bestimmen.

An Hand praktischer Beispiele, guter Figuren und Tabellen werden die Methoden von dem Verfasser, der selbst wesentlich an dem Ausbau der Methode mitgearbeitet hat und über eine große praktische Erfahrung verfügt, erläutert. Es wird vorausgesetzt, daß der Leser die Untersuchungsmethoden mit dem gewöhnlichen Polarisationsmikroskop und somit also auch die Grundlagen der Kristalloptik beherrscht. F. Laves.

Wolfgang Riezler, Einführung in die Kernphysik (Meyers kleine Handbücher, Bd. 6). 188 S. Mit 14 Tabellen und 19 Fig. Leipzig 1937. Bibliographisches Institut. RM 2.60.

Das Erscheinen dieses Bändchens entspricht zweifellos einem Bedürfnis. Zahlreiche Physiker und physikalisch vorgebildete Naturwissenschaftler anderer Disziplinen haben heute den Wunsch nach einer Orientierung über den Inhalt der Kernphysik; sie wollen zwar nicht die Mühe aufwenden, die zu einem systematischen Erfassen ihres Gesamtgebiets nötig wäre, aber sie wollen ihre experimentellen Grundlagen beurteilen können und von der Theorie wenigstens soviel wissen, daß sie die häufiger gebrauchten Begriffe richtig einordnen können. Hier werden sie diesen Wunsch erfüllt finden.

Die vorausgesetzten Vorkenntnisse gehen kaum über das hinaus, was auch einem der Kernphysik fernstehenden Experimentalphysiker geläufig ist. Es ist ein besonders glücklicher Gedanke, daß für den physikalisch weniger vorgebildeten Leser noch viele der im Buch vorausgesetzten Begriffe am Schluß des Bandes in einem alphabetischen „Fachlexikon" von 7 Seiten kurz erklärt werden. Beispielsweise findet man unter dem Buchstaben K: Kalorie, Kanalstrahl, Kathode, Klassische Physik, Kondensator, Korpuskel. Dadurch wird es vermieden, den Text mit trivialen, von der Hauptsache ablenkenden Erklärungen zu belasten.

Nach einer historischen Einleitung schildert das erste Kapitel, wie man die Grundeigenschaften der Kerne definiert und experimentell feststellt. Das zweite Kapitel teilt die experimentellen Ergebnisse über die Radioaktivität mit und schildert, soweit das ohne Verwendung des wellenmechanischen Begriffsapparats möglich ist, die Gamowsche Theorie des α-Zerfalls und die Neutrinohypothese. Das dritte Kapitel, über die Methoden der Erzeugung und des Nachweises schneller Teilchen, dient als Vorbereitung für das ausführliche vierte Kapitel, das die künstlichen Kernumwandlungen im einzelnen schildert. Auch hier fügt der Verfasser stets soviel von der Theorie ein, daß der Zusammenhang der Ergebnisse untereinander deutlich wird und ein Gesamtbild entsteht. Schade ist nur, daß er die Bohrsche Theorie des Neutroneneinfangs, die ja besonders leicht anschaulich dargestellt werden kann, noch nicht aufgenommen hat. Das letzte Kapitel bringt die Isotopensystematik und eine Andeutung der Theorie des Kernbaues. Der Schluß weist auf mögliche praktische Anwendungen der Kernphysik hin.

Die Darstellung ist klar und verständlich. Zahlreiche Tabellen fassen die empirischen Ergebnisse übersichtlich zusammen. Einband und Druck sind geschmackvoll und tun das ihre dazu, daß man das Bändchen gerne zur Hand nimmt.

C. F. v. Weizsäcker.

NACHRICHTEN.

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. habil. Günther Briegleb für physikalische Chemie, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. H. Brodersen für Experimentalphysik.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Königsberg Dr. Friedrich Errulat zum ord. Professor für Geophysik und Erdmagnetismus an der Universität Hamburg, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Wolfgang Haack zum ord. Professor für Mathematik und Geometrie an der Technischen Hochschule Karlsruhe, der Dozent an der Universität Berlin Dr. Eberhard Hopf zum ord. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Leipzig, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Aachen Dr. Rudolf Iglisch zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Braunschweig, der Dozent an der Universität Göttingen Dr. Heinrich Jung zum ord. Professor für Geophysik an der Bergakademie Clausthal, Dr. Franz Rellich von der Universität Marburg zum ord. Professor für angewandte Mathematik an derselben Universität, der ord. Professor der Chemie an der Universität Göttingen Dr. Ernst Waldschmidt-Leitz in der gleichen Eigenschaft an der Deutschen Universität Prag, der Dozent für Nahrungsmittelchemie an der Universität Kiel Dr. Alfons Schloemer in gleicher Eigenschaft an der Universität Kiel, Dozent Dr. Herbert Seifert von der Technischen Hochschule Dresden zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg, der Observator und Professor Dr. Friedrich Pavel zum Abteilungsvorsteher und Professor beim Geodätischen Institut in Potsdam, der Dozent für Chemie in Anwendung auf Biochemie an der Universität Breslau Dr. Kurt Rehorst zum a. o. Professor daselbst, der Dozent an der Universität Berlin Dr. Erhard Landt zum a. o. Professor für technologische Chemie daselbst, der wissenschaftliche Assistent an der Technischen Hochschule Hannover Dr. Harry Weissmann zum ord. Professor für Elektrische Anlagen daselbst, der a. o. Professor der Technischen Hochschule Aachen Dr. Robert Sauer zum ord. Professor für angewandte Mechanik und darstellende Geometrie daselbst.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Chemie an der Universität London Dr. F. G. Donnan, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Berlin Dr. Arthur Wehnelt, der ord. Professor für theoretische Physik an der Universität Marburg Dr. F. Arthur Schulze.

Gestorben: Der schwedische Chemiker (und Erfinder auf dem Gebiete der Kobaltfarben) Dr. Erik Ludwig Rinman, der ord. Professor für Allgemeine Elektrotechnik und elektrische Meßkunde an der Technischen Hochschule Wien Dr. August Kann, der ord. Professor der theoretischen und physikalischen Chemie an der Universität Graz Dr. Robert Kremann, der frühere ord. Professor der organischen Chemie an der Technischen Hochschule Aachen Geh. Regierungsrat Dr. Julius Bredt, der ord. Professor für Maschinenelemente, insbesondere Ölmaschinen an der Technischen Hochschule Trondheim Dr. Reinhold Lutz, der frühere ord. Professor für Mathematik und Naturwissenschaften an der Staatlichen Akademie Braunsberg Geh. Regierungsrat Dr. Franz Niedenzu.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — D. A. 1330. III. Vj. 1937. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.